§3. Hệ thức lượng trong tam giác

51. Các kết luận đúng là a) và d).

52. a) Từ giả thiết suy ra $b < a$ nên $\widehat{B} < \widehat{A}$. Tương tự $\widehat{C} < \widehat{A}$.

b) Ta có $b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 < (b^2 + c^2)^2$. Từ đó suy ra $a^2 < b^2 + c^2$ hay $b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2$. Vậy $\cos A > 0$, do đó $\widehat{A} < 90^o$. Theo câu a) thì $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cũng là góc nhọn.

53. a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 49 + 100 - 140\cos 56^o29' \approx 71,7 \Rightarrow c \approx 8,47$.

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \approx 19,6 \Rightarrow b \approx 4,43$.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \approx 135,35 \Rightarrow a \approx 11,63$.

54. a) $\widehat{A} = 180^o - (33^o24' + 66^o59') = 79^o37'$.

Ta có $b = \dfrac{a.\sin 33^o24'}{\sin 79^o37'} \approx 61$; $\quad c = \dfrac{a.\sin 66^o59'}{\sin 79^o37'} \approx 102$.

b) Từ đẳng thức $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ suy ra $\sin B = \dfrac{13.\sin 67^o23'}{20} \approx 0,6$;

Vì $b < a$ nên $\widehat{B} < \widehat{A}$, suy ra $\widehat{B} \approx 36^o52'$; $\widehat{C} \approx 180^o - (67^o23' + 36^o52') \approx 75^o45'$;

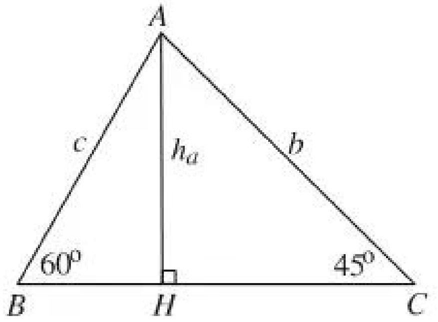
$$c = \frac{20.\sin 75^o45'}{\sin 67^o23'} \approx 21.$$

55. a) Ta có $\widehat{A} = 180^o - (60^o + 45^o) = 75^o$.

Đặt $AC = b$, $AB = c$. Theo định lí hàm số sin :

$$\frac{b}{\sin 60^o} = \frac{a}{\sin 75^o} = \frac{c}{\sin 45^o}.$$

Suy ra $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^{\circ}}$; $c = \dfrac{a\sqrt{2}}{2.\sin 75^{\circ}}$.



Hình 52

b) Kẻ $AH \perp BC$ (h. 52), do $\widehat{B}, \widehat{C}$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC, hay $BC = HB + HC$. Ta có

$$\begin{cases} HC = \dfrac{b\sqrt{2}}{2} \\ HB = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = HC + HB = b\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a\sqrt{6} + a\sqrt{2}}{4.\sin 75^{\circ}}$$

$$\Rightarrow \sin 75^{\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^{\circ} = \sqrt{1 - \sin^2 75^{\circ}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

56. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 20^2 + 35^2 - 20.35$

$= 400 + 1225 - 700 = 925.$

Vậy $a \approx 30{,}41$.

a) Từ công thức tính diện tích $S = \dfrac{1}{2}ah_a$, suy ra $h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{bc.\sin A}{a}$

$$\approx \frac{20.35\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{30{,}41} \approx 19{,}93.$$

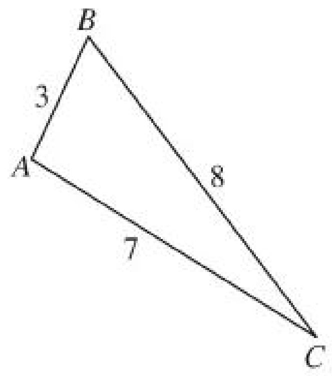
b) $2R = \dfrac{a}{\sin A} \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{30{,}41}{\sqrt{3}} \approx 17{,}56.$

c) Từ công thức $S = \dfrac{a+b+c}{2}r$ và $S = \dfrac{abc}{4R} \approx 303{,}06$, suy ra

$$r = \frac{2S}{a+b+c} \approx \frac{606{,}12}{30{,}4 + 20 + 35} \approx 7{,}1.$$

57. a) Áp dụng công thức Hê-rông ta được :

$$S = \sqrt{9.(9-3)(9-7)(9-8)} = 6\sqrt{3}.$$



Hình 53

b) (h. 53) Áp dụng các công thức tính diện tích $S = \dfrac{abc}{4R}$ và $S = p.r$.

$ĐS: R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$, $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

58. $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{a}{2R}} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{abc}R.$

Tương tự, ta có $\cot B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{abc}R$;

$$\cot C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{abc}R.$$

Từ đó suy ra $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}R$.

59. a) $b^2 - c^2 = (a^2 + c^2 - 2ac.\cos B) - (a^2 + b^2 - 2ab.\cos C)$

$= c^2 - b^2 + 2a(b\cos C - c\cos B).$

Từ đó ta được $2(b^2 - c^2) = 2a(b\cos C - c\cos B)$, suy ra

$$b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B).$$

b) $a(c\cos C - b\cos B) = ac\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - ab\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$= \frac{1}{2bc}\left[c^2(a^2+b^2-c^2) - b^2(a^2+c^2-b^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2bc}\left[a^2(c^2-b^2) + (b^2-c^2)(b^2+c^2)\right]$$

$$= (b^2-c^2)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = (b^2-c^2)\cos A.$$

c) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức

$$2R\sin C = 2R\sin A\cos B + 2R\sin B\cos A$$

hay $\qquad c = a\cos B + b\cos A. \qquad (*)$

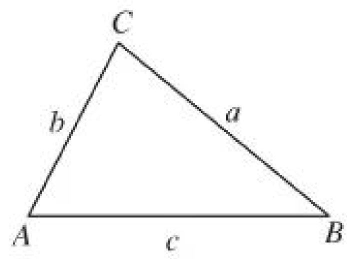
Cách 1. (h. 54)

Ta có $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$,

suy ra $c^2 = bc.\cos A + ac.\cos B$,

dẫn đến $c = b.\cos A + a.\cos B$.



Hình 54

Cách 2. Biến đổi vế phải của (*) được :

$$a.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{1}{2c}(a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{2c^2}{2c} = c.$$

60. (h. 55) a) Theo công thức Hê-rông, ta có :

$$S_{AMC} = \sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2} - 13\right)\left(\frac{27}{2} - 6\right)\left(\frac{27}{2} - 8\right)}$$

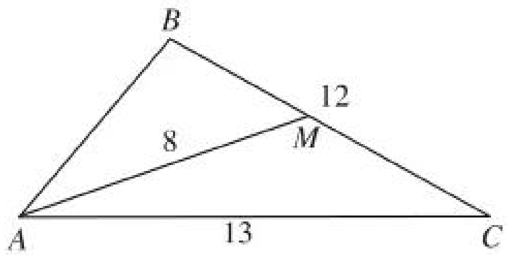
$$= \frac{9\sqrt{55}}{4}.$$

Suy ra $S_{ABC} = 2S_{AMC} = \frac{9\sqrt{55}}{2}$.

b) Ta có $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$,

suy ra $AB^2 = c^2 = 2AM^2 - b^2 + \frac{a^2}{2}$

$= 2.64 + 72 - 169 = 31 \Rightarrow c = \sqrt{31}$.



Hình 55

Từ đó $\cos B = \frac{31 + 144 - 169}{24\sqrt{31}} = \frac{1}{4\sqrt{31}} \approx 0{,}045 \Rightarrow \widehat{B} \approx 87^\circ 25'$.

61. Đẳng thức $2\cot A = \cot B + \cot C$ tương đương với

$2.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}R = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}R + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}R$ (theo tính toán như bài 58) hay $b^2 + c^2 = 2a^2$.

Từ giả thiết suy ra $c^2m_c^2 = b^2m_b^2$, do đó

$$c^2\left(\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)=b^2.\left(\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)$$

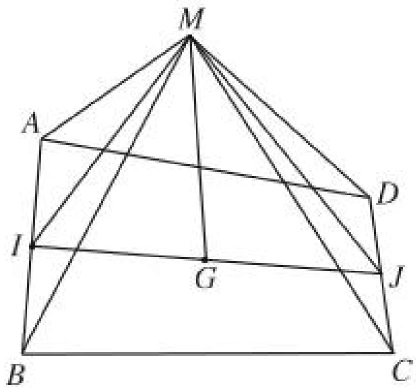
$$\Rightarrow 2b^2c^2+2a^2c^2-c^4=2b^2c^2+2a^2b^2-b^4.$$

$$\Rightarrow b^4-c^4=2a^2\,(b^2-c^2)$$

$$\Rightarrow b^2+c^2=2a^2 \qquad (\text{do } b^2-c^2\neq 0).$$

Ta đi đến điều phải chứng minh

62. Xét tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của IJ (h. 56). Với mỗi điểm M, ta đều có :



Hình 56

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$$

$$=2MI^2+\frac{AB^2}{2}+2MJ^2+\frac{CD^2}{2}$$

$$=2\left(2MG^2+\frac{IJ^2}{2}\right)+\frac{AB^2+CD^2}{2}$$

$$=4MG^2+\frac{AB^2+CD^2}{2}+IJ^2.$$

Từ đó suy ra

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=k^2$$

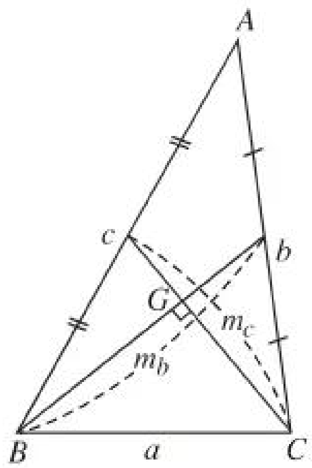
$\Leftrightarrow\ 4MG^2=k^2-\left(\dfrac{AB^2+CD^2}{2}+IJ^2\right)$ không đổi. Kết luận tương tự như bài 26.

63. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC (h. 57).

Khi đó $GB\perp GC \Leftrightarrow a^2=\frac{4}{9}\left(m_b^2+m_c^2\right)$

$$\Leftrightarrow 9a^2=4\left(\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 9a^2=4a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow 5a^2=b^2+c^2.$$



Hình 57

Biến đổi đẳng thức $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}R = 2\left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}R + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}R\right)$ (theo tính toán như bài 58)

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$.

Vậy $GB \perp GC \Leftrightarrow \cot A = 2(\cot B + \cot C)$.

64. Giả sử tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và có trọng tâm G. Ta có :

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GO}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 - 2\overrightarrow{GO}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + 3\overrightarrow{GO}^2.$$

Do $OA = OB = OC = R$ và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

nên $3R^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3d^2$.

Mặt khác, $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

nên $3R^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 3d^2$ suy ra $R^2 - d^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

65. (h. 58)

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O ; R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I ; r)$.

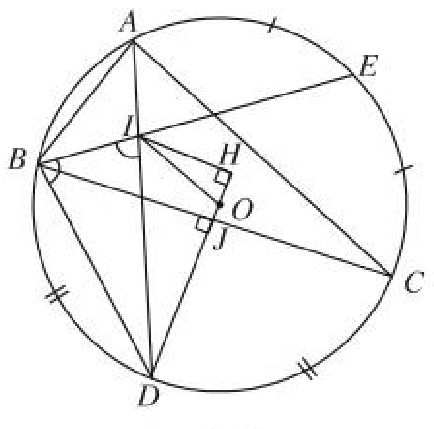
Gọi D, E thứ tự là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{AC}$ thì $OD \perp BC$, $\widehat{BAD} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Mặt khác, ta có

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AE})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{DC} + \text{sđ}\overset{\frown}{EC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{sđ}\,\overset{\frown}{DCE}.$$



Hình 58

Vậy $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$, suy ra $ID = BD = 2R\sin\dfrac{A}{2}$.

Trong tam giác OID ta có : $OI^2 = ID^2 + OD^2 - 2\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DO}$.

$OI^2 = 4R^2\sin^2\dfrac{A}{2} + R^2 - 2\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DH}$ (với $IH \perp OD$).

Dễ thấy $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DH} = DO.(DJ + JH) = R\left(BD\sin\dfrac{A}{2} + r\right)$

$$= R(2R\sin^2\frac{A}{2} + r) = 2R^2\sin^2\frac{A}{2} + Rr.$$

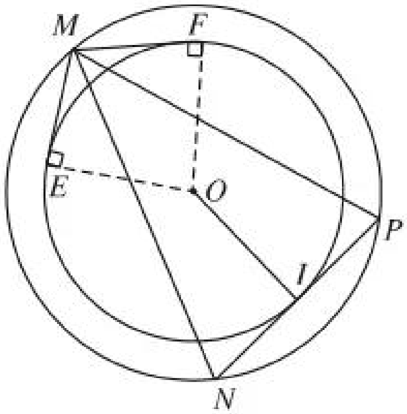
Từ đó suy ra $d^2 = R^2 - 2Rr$.

66. (h. 59)

a) Ta có $NP = 2R\sin 30^o = R$,

$OI^2 = ON^2 - NI^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4}$.

Suy ra $OI = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ không đổi, do đó I thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.



Hình 59

Đảo lại với mỗi điểm I trên đường tròn đó ta kẻ dây cung NP của (O) vuông góc với OI thì $NP = 2NI = R$.

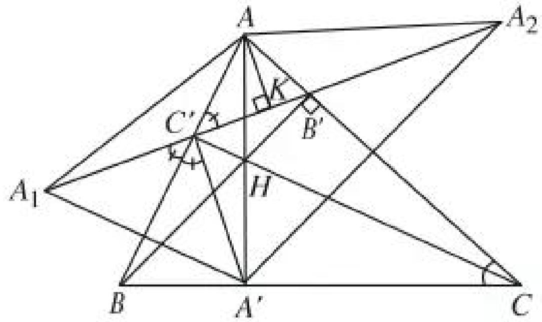
Ta có $\sin\widehat{NMP} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$. Góc NMP có thể bằng 30^o hoặc 150^o. Dễ thấy $\widehat{NMP} = 30^o$ khi và chỉ khi O, M ở về một phía của NP hay I nằm trên cung lớn $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn $\left(O; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ (E, F là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ M tới đường tròn $\left(O; R\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$).

Vậy quỹ tích của I là cung lớn $\overset{\frown}{EF}$.

b) Diện tích tam giác MNP là $S = \dfrac{1}{2}MN.MP.\sin 30^o = \dfrac{1}{4}MN.MP$. Theo bất đẳng thức Cô-si, $MN.MP \le \dfrac{MN^2 + MP^2}{2}$, mà $MN^2 + MP^2 = 2MI^2 + \dfrac{R^2}{2}$ nên $S \le \dfrac{1}{4}\left(MI^2 + \dfrac{R^2}{4}\right)$. (*)

Ta có MI lớn nhất khi M, O, I thẳng hàng và O nằm giữa M, I. Khi đó ta cũng có $MN = MP$ nên (*) xảy ra dấu "=". Vậy S lớn nhất khi và chỉ khi MI lớn nhất hay M, O, I thẳng hàng và O nằm giữa M, I.

67. (h. 60)



Hình 60

a) Ta có $AB' = AB\cos A = 2R\sin C\cos A$.

Trong tam giác $AB'C'$ có

$$\frac{B'C'}{\sin A} = \frac{AB'}{\sin C'}.$$

Nhưng $\widehat{AC'B'} = \widehat{C}$ (do $BC'B'C$ là tứ giác nội tiếp), suy ra $\dfrac{B'C'}{\sin A} = \dfrac{AB'}{\sin C}$.

Từ đó suy ra $B'C' = \dfrac{AB'\sin A}{\sin C'} = \dfrac{2R\sin C\cos A\sin A}{\sin C} = 2R\sin A\cos A$.

b) Ta có $\widehat{A_1C'B} = \widehat{BC'A'}$ (do A_1, A' đối xứng với nhau qua AB).

$\widehat{BC'A'} = \widehat{AC'B'}$ (do $AC'A'C$ và $BC'B'C$ cùng là tứ giác nội tiếp).

Suy ra $\widehat{A_1C'B} = \widehat{B'C'A}$. Vậy A_1, C', B' thẳng hàng và $A_1C' = A'C'$.

Tương tự cũng có C', B', A_2 thẳng hàng và $B'A_2 = B'A'$.

Do đó, chu vi tam giác $A'B'C'$ bằng $A'C' + C'B' + B'A' = A_1C' + C'B' + B'A_2 = A_1A_2$.

c) Do A_1 và A' đối xứng nhau qua AB nên $AA_1 = AA'$, $\widehat{A_1AB} = \widehat{BAA'}$; A_2 và A' đối xứng nhau qua AC nên $AA_2 = AA'$, $\widehat{A'AC} = \widehat{CAA_2}$.

Do đó tam giác AA_1A_2 là tam giác cân có góc ở đỉnh $\widehat{A_1AA_2} = 2\widehat{A}$. Kẻ AK vuông góc với A_1A_2, ta có

$$A_1A_2 = 2A_1K = 2AA_1\sin A = 2AA'\sin A = 2AB\sin B\sin A$$

$$= 4R\sin C\sin B\sin A.$$

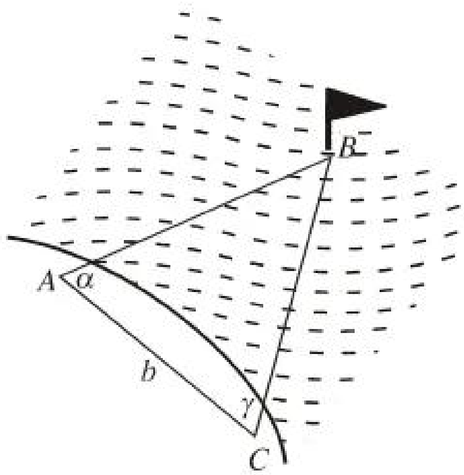
Mặt khác theo câu a) :

$$B'C' + B'A' + A'C' = 2R\sin A\cos A + 2R\sin C\cos C + 2R\sin B\cos B.$$

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

68. (h. 61)

Chọn vị trí C thích hợp trên bờ cách điểm A một khoảng bằng b.



Hình 61

Sau đó dùng giác kế đo các góc được $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \gamma$.

Áp dụng định lí sin : $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$, ta tính được :

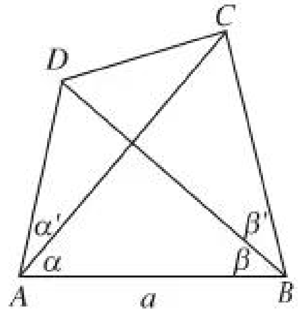
$$AB = \frac{AC\sin C}{\sin B} = \frac{b\sin\gamma}{\sin\left[180^\circ - (\alpha+\gamma)\right]}$$

$$= \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

69. (h. 62)

Tính AD và AC như bài toán 68 ta được

$$AD = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\alpha'+\beta)},\ AC = \frac{a\sin(\beta+\beta')}{\sin(\alpha+\beta+\beta')}.$$



Hình 62

Sau đó, áp dụng định lí côsin vào tam giác ACD ta có :

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.\,AD\cos\alpha'.$$

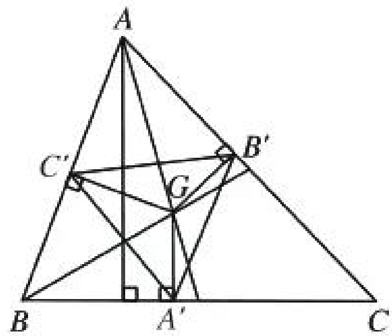
(Có thể dùng bài toán này để xác định khoảng cách giữa hai vị trí mà ta không tới được, chẳng hạn hai vị trí ở trên không hay trên biển).

70. (h. 63)

$S_{A'B'C'} = S_{GA'B'} + S_{GB'C'} + S_{GC'A'}$;

$$S_{GA'B'} = \frac{1}{2}GA'.GB'.\sin(180^\circ - \widehat{C})$$

$$= \frac{1}{18}h_a h_b \sin C.$$



Hình 63

Trong tam giác ABC, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$,

$\sin C = \dfrac{c}{2R}$.

Từ đó ta có $S_{GA'B'} = \dfrac{S^2.c}{9ab.R} = \dfrac{S^2.c^2}{9abc.R}$.

Tương tự, $S_{GB'C'} = \dfrac{S^2a^2}{9abc.R}$; $S_{GC'A'} = \dfrac{S^2b^2}{9abc.R}$.

Suy ra $S_{A'B'C'} = \dfrac{S^2}{9abc.R}(a^2+b^2+c^2)$.

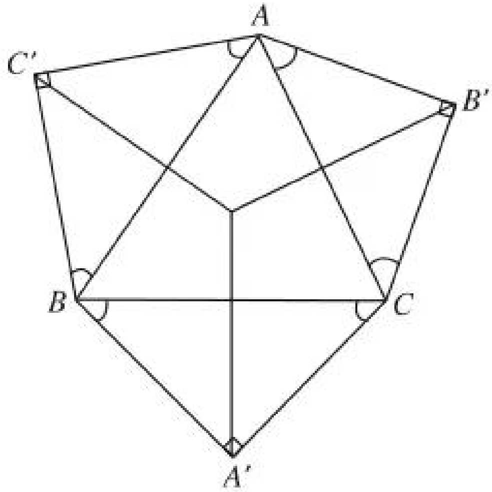
Ta lại có $S = \dfrac{abc}{4R}$ và $a^2+b^2+c^2 = 9(R^2-d^2)$ (theo bài 64)

nên $S_{A'B'C'} = \dfrac{R^2-d^2}{4R^2}.S$.

71. (h. 64) a) $\cos(\alpha+90^o)$

$= -\cos\left[180^o - (\alpha+90^o)\right]$

$= -\cos(90^o - \alpha) = -\sin\alpha$.



Hình 64

b) Dễ thấy $AB' = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$, $AC' = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$,

$\widehat{B'AC'} = \widehat{A} + 90^o$.

Trong tam giác $AB'C'$ ta có :

$B'C'^2 = AB'^2 + AC'^2 - 2AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}$

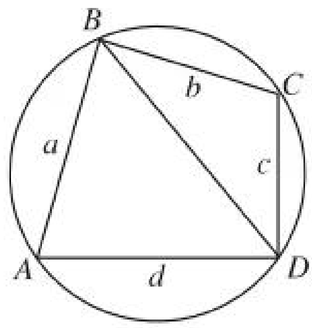
$= \dfrac{b^2+c^2}{2} + bc\sin A$

$= \dfrac{b^2+c^2}{2} + 2S$.

Tương tự, $C'A'^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} + 2S$, $\quad A'B'^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} + 2S$.

Từ đó suy ra $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2+b^2+c^2+6S$.

72. Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với độ dài cạnh là a, b, c, d (h. 65).



Hình 65

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o$ nên $\sin C = \sin A$;

$\cos C = -\cos A$.

Ta có $S = S_{ABD} + S_{CDB}$

$= \dfrac{1}{2}ad\sin A + \dfrac{1}{2}bc\sin C$

hay $2S = (ad + bc)\sin A$, suy ra $\sin A = \dfrac{2S}{ad+bc}$.

Mặt khác, tam giác ABD có $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad.\cos A$,

còn tam giác CBD có : $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.

Suy ra $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad + bc)\cos A$

nên $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$.

Do $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ nên $16S^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad + bc)^2$.

Vậy $16S^2 = [2(ad + bc)]^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2$

$= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)$

$= [(a + d)^2 - (b - c)^2].[(b + c)^2 - (a - d)^2]$

$= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d)$

$= (2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a)$

$= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$.

Từ đó ta có $S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$.

73. (h. 66) a) Giả sử tam giác đã cho là ABC có

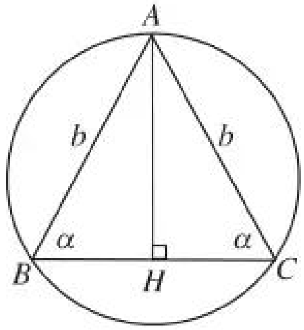
$AB = AC = b$.

Đặt $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ thì $\alpha < 90^\circ$.

Ta có

$\sin\alpha = \dfrac{b}{2R}$ nên $\cos B = \cos C = \cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{4R^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$.



Hình 66

Ta lại có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{2b^2 - 4b^2\cos^2\alpha}{2b^2}$

$= 1 - 2\cos^2\alpha = 1 - 2\left(1 - \dfrac{b^2}{4R^2}\right) = \dfrac{b^2 - 2R^2}{2R^2}$.

b) Diện tích tam giác là

$$S = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.2b\cos\alpha.b\sin\alpha = b^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{b^3\sqrt{4R^2-b^2}}{4R^2}.$$

Chu vi tam giác là $2p = 2b + 2b\dfrac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}$.

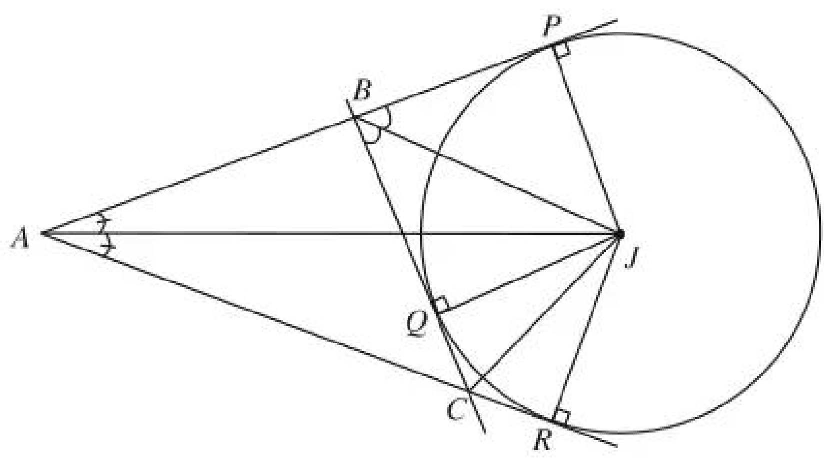
Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{b^2\sqrt{4R^2-b^2}}{2R\left(2R+\sqrt{4R^2-b^2}\right)}$.

c) Ta phải tìm b để $y = b^3\sqrt{4R^2-b^2}$ đạt GTLN.

Viết lại $y = 3\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{b^2}{3}.\dfrac{b^2}{3}.\dfrac{b^2}{3}(4R^2-b^2)}$. Khi đó coi biểu thức trong căn là tích của bốn thừa số mà tổng của chúng bằng $4R^2$ không đổi nên y đạt GTLN khi và chỉ khi $\dfrac{b^2}{3} = 4R^2 - b^2$ hay $b^2 = 3R^2$ hay $b = R\sqrt{3}$.

Khi đó $\sin\alpha = \dfrac{R\sqrt{3}}{2R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^{\circ}$, ta được tam giác ABC là tam giác đều.

74. Gọi Q, R, P là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (J, r_a) lần lượt với các đường thẳng BC, CA, AB (h. 67) thì :



Hình 67

$$S_{JAB} = \frac{1}{2}AB.JP = \frac{c.r_a}{2},$$

$$S_{JAC} = \frac{1}{2}AC.JR = \frac{br_a}{2},$$

$$S_{JBC} = \frac{1}{2}BC.JQ = \frac{ar_a}{2}.$$

Ta có

$$S = S_{JAB} + S_{JAC} - S_{JBC}$$
$$= \frac{b + c - a}{2}r_a$$
$$= \frac{a + b + c - 2a}{2}r_a.$$

Vậy $S = (p - a).r_a$

75. Từ bài 74 (chương II), suy ra $r_a = \dfrac{S}{p - a}$, tương tự $r_b = \dfrac{S}{p - b}$; $r_c = \dfrac{S}{p - c}$. Mặt khác, từ công thức tính diện tích ta có $r = \dfrac{S}{p}$. Từ giả thiết suy ra :

$$\frac{1}{p - a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \Rightarrow \frac{a}{p(p - a)} = \frac{2p - (b + c)}{(p - b)(p - c)}.$$

Vì $2p - (b + c) = a$, suy ra $p(p - a) = (p - b)(p - c)$.

$$pa = p(b + c) - bc \Rightarrow bc = p(b + c - a) = \frac{b + c + a}{2}.(b + c - a)$$
$$\Rightarrow 2bc = (b + c)^2 - a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

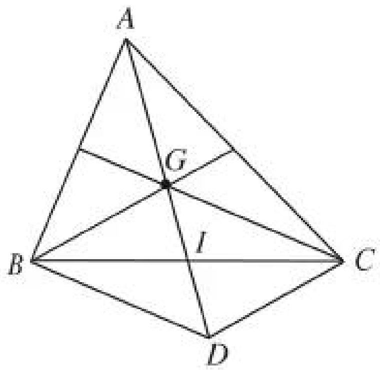
Theo định lí Py-ta-go ta có $\widehat{A} = 90^o$.

76. a) (h. 68) Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\dfrac{S_{ABC}}{S_{GBC}} = \dfrac{AI}{GI} = 3$. Vậy $S = 3S_{GBC}$.

Lấy D là điểm đối xứng với G qua I ta được hình bình hành $BGCD$, do đó :

$$S_{GBC} = S_{BGD} = \frac{1}{2}S_{BGCD}.$$

Vậy $S_{ABC} = 3S_{BGD}$.



Hình 68

Tam giác BGD có độ dài ba cạnh bằng 10, 12, 18 nên :

$$S_{BGD} = \sqrt{20.(20-10).(20-12)(20-18)}$$
$$= \sqrt{20.10.8.2} = 40\sqrt{2}.$$

Vậy $\quad S = 120\sqrt{2}.$

b) Giả sử $m_a = 15$, $m_b = 18$, $m_c = 27$. Ta có :

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \\ c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 1704.$$

Ta lại có $\quad b^2 - a^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 - m_b^2\right) = -132,$

$$b^2 - c^2 = \frac{4}{3}\left(m_c^2 - m_b^2\right) = 540.$$

Từ đó ta tính được $b = 8\sqrt{11},\ a = 2\sqrt{209},\ c = 2\sqrt{41}$.

77. a) $b = a$ nên $\widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = \dfrac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ$.

$AB = c = 2a.\sin\dfrac{C}{2} = 2.6,3.\sin27^\circ \approx 5,72.$

b) $\quad c^2 = 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos130^\circ$

$$\approx 578 - 322.(-0,6428) \approx 785.$$

Vậy $c \approx 28$.

Học sinh tự tính các góc A, B.

78. a) $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 80^\circ.$

Từ $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ suy ra $a = \dfrac{c.\sin A}{\sin C} = \dfrac{7\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 12,31,$

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} = \frac{14\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,14.$$

b) $\widehat{B} = 20^\circ$; $a = \dfrac{c.\sin A}{\sin C} \approx 25,98$; $b = \dfrac{c.\sin B}{\sin C} \approx 13,82.$

79. a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}7333$; $\widehat{A} \approx 42^\circ 50'$.

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0{,}4857$; $\widehat{B} \approx 60^\circ 56'$.

$\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 76^\circ 14'$.

b) $\cos A = 0{,}5755$; $\widehat{A} \approx 54^\circ 52'$.

$\cos B = 0{,}0998$; $\widehat{B} \approx 84^\circ 16'$.

$\widehat{C} \approx 40^\circ 52'$.

80. $\widehat{ABC} = 30^\circ$; $\widehat{ACB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 30^\circ$.

Từ đó suy ra $AC = CB = 100 \Rightarrow AH = AC.\sin\widehat{ACH} = 50$.

Chiều cao của ngọn đồi là 50 mét.

81. Trọng lực $\vec{P}$ được phân tích thành hai lực $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$ dọc theo hai đoạn dây. Lực căng lên mỗi dây sẽ là :

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\vec{P}\right|.\cos 45^\circ = 50\sqrt{2}(\text{N})$$

$$\left|\overrightarrow{CN}\right| = \left|\vec{P}\right|.\cos 60^\circ = 50(\text{N}).$$