

### §3. Hệ thức lượng trong tam giác

Trong tam giác  $ABC$  ta thường kí hiệu :

- $a, b, c$  lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh  $A, B, C$ .
- $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là độ dài các trung tuyến ứng với các cạnh  $a, b, c$ .
- $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao ứng với các cạnh  $a, b, c$ .
- $p = \frac{a+b+c}{2}$  là nửa chu vi tam giác,  $S$  là diện tích tam giác.
- $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp.

#### I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí côsin :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

2. Định lí sin :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

3. Công thức trung tuyến :  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .

4. Công thức tính diện tích tam giác :

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

$$S = pr.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Hê-rông).}$$

## II – ĐỀ BÀI

51. Cho tam giác  $ABC$  có độ dài các cạnh  $a = 3, b = 4, c = 5,2$ . Hỏi trong các kết luận sau, kết luận nào đúng ?

a)  $\widehat{A}$  là góc nhọn.

b)  $\widehat{B}$  là góc tù.

c)  $\widehat{C}$  là góc nhọn.

d)  $\widehat{C}$  là góc tù.

52. Tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn hệ thức  $a^4 = b^4 + c^4$ .

a) Chứng minh  $\widehat{B} < \widehat{A}$  và  $\widehat{C} < \widehat{A}$ .

b) Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn.

53. Tính cạnh thứ ba của tam giác  $ABC$  trong mỗi trường hợp sau :

a)  $a = 7 ; \quad b = 10 ; \quad \widehat{C} = 56^\circ 29'$ .

b)  $a = 2 ; \quad c = 3 ; \quad \widehat{B} = 123^\circ 17'$ .

c)  $b = 0,4 ; \quad c = 12 ; \quad \widehat{A} = 23^\circ 28'$ .

54. Tính các cạnh và góc còn lại của tam giác  $ABC$  trong mỗi trường hợp sau :

a)  $a = 109 ; \quad \widehat{B} = 33^\circ 24' ; \quad \widehat{C} = 66^\circ 59'$ .

b)  $a = 20 ; \quad b = 13 ; \quad \widehat{A} = 67^\circ 23'$ .

55. Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 60^\circ ; \widehat{C} = 45^\circ ; BC = a$ .

a) Tính độ dài hai cạnh  $AB, AC$ .

b) Chứng minh  $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .

56. Tam giác  $ABC$  có  $c = 35, b = 20, \widehat{A} = 60^\circ$ .

a) Tính chiều cao  $h_a$ .

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

57. Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $AB = 3, AC = 7, BC = 8$ .

a) Tính diện tích của tam giác.

b) Tính bán kính các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác.

58. Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$  ta có :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R.$$

59. Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$  ta có :

a)  $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$ .

b)  $(b^2 - c^2)\cos A = a(c\cos C - b\cos B)$ .

c)  $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$ .

60. Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 13$ , trung tuyến  $AM = 8$ .

a) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

b) Tính góc  $B$ .

61. Tam giác  $ABC$  có  $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ . Chứng minh rằng :

$$2\cot A = \cot B + \cot C.$$

62. Tìm quỹ tích những điểm có tổng bình phương các khoảng cách đến bốn đỉnh của một tứ giác bằng  $k^2$  không đổi.

63. Chứng minh rằng hai trung tuyến kẻ từ  $B$  và  $C$  của tam giác  $ABC$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi có hệ thức sau :

$$\cot A = 2(\cot B + \cot C).$$

64. Chứng minh rằng khoảng cách  $d$  từ trọng tâm tam giác  $ABC$  đến tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó thoả mãn hệ thức

$$R^2 - d^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

65. Chứng minh rằng trong mỗi tam giác, khoảng cách  $d$  từ tâm đường tròn nội tiếp đến tâm đường tròn ngoại tiếp thoả mãn hệ thức

$$d^2 = R^2 - 2Rr \quad (\text{Hệ thức Ô-le})$$

66. Cho điểm  $M$  cố định trên đường tròn  $(O ; R)$  và hai điểm  $N, P$  chạy trên đường tròn đó sao cho  $\widehat{NMP} = 30^\circ$ .

a) Tìm quỹ tích trung điểm  $I$  của  $NP$ .

b) Xác định vị trí của  $N, P$  để diện tích tam giác  $MNP$  đạt giá trị lớn nhất.

67. Kẻ các đường cao  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  của tam giác nhọn  $ABC$ .
- Chứng minh rằng  $B'C' = 2R\sin A\cos A$ .
  - Lấy  $A_1, A_2$  lần lượt là điểm đối xứng với  $A'$  qua  $AB, AC$ . Chứng minh rằng chu vi tam giác  $A'B'C'$  bằng độ dài đoạn thẳng  $A_1A_2$ .
  - Chứng minh hệ thức :

$$\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C = 2\sin A\sin B\sin C.$$

68. Từ một vị trí quan sát  $A$  cố định trên bờ biển, người ta muốn tính khoảng cách đến một vị trí  $B$  trên mặt biển bằng giác kế (máy đo góc). Em có thể làm việc đó bằng cách nào ?

69. Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $\widehat{CAB} = \alpha$ ,  $\widehat{DBA} = \beta$ ,  $\widehat{DAC} = \alpha'$ ,  $\widehat{CBD} = \beta'$ . Tính độ dài cạnh  $CD$ .

70. Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là hình chiếu của  $G$  trên các cạnh  $BC, CA, AB$  của tam giác. Hãy tính diện tích của tam giác  $A'B'C'$  biết rằng tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $S$  và khoảng cách từ  $G$  đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó bằng  $d$ , bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng  $R$ .

71. a) Chứng minh rằng nếu  $\alpha$  là góc nhọn thì  $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$ .

b) Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  và diện tích  $S$ . Trên ba cạnh và về phía ngoài của tam giác đó dựng các tam giác vuông cân  $A'BC, B'AC, C'AB$  ( $A', B', C'$  lần lượt là đỉnh). Chứng minh rằng :

$$A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S.$$

72. Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được và có các cạnh  $a, b, c, d$ . Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó được tính theo công thức sau :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ trong đó } p \text{ là nửa chu vi tứ giác.}$$

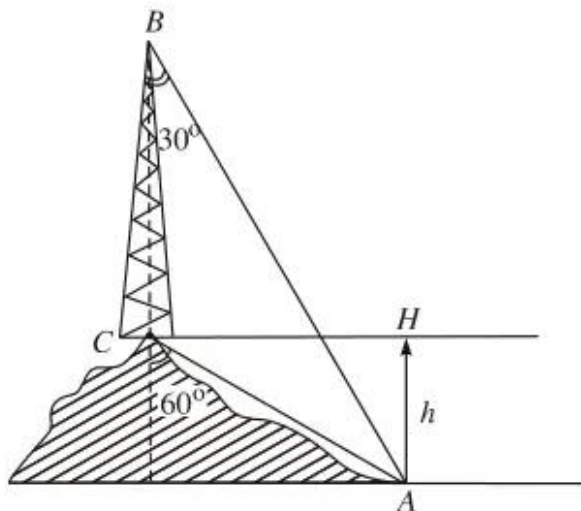
73. Cho tam giác cân có cạnh bên bằng  $b$  nội tiếp trong đường tròn  $(O; R)$ .

- Tính cosin của các góc của tam giác.
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- Với giá trị nào của  $b$  thì tam giác đó có diện tích lớn nhất ?

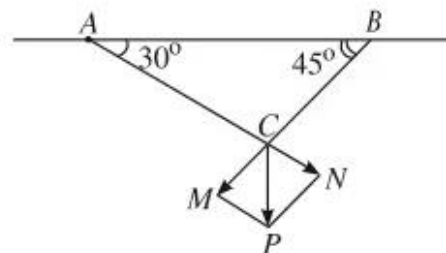
74. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $r_a$  là bán kính đường tròn bàng tiếp góc  $A$ . Chứng minh rằng diện tích tam giác  $ABC$  tính được theo công thức :

$$S = (p - a)r_a.$$

75. Cho tam giác  $ABC$  có bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$  và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc  $A, B, C$  tương ứng bằng  $r_a, r_b, r_c$ .  
 Chứng minh rằng nếu  $r = r_a - r_b - r_c$  thì góc  $A$  là góc vuông.
76. Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba trung tuyến bằng 15 ; 18 ; 27.  
 a) Tính diện tích của tam giác.  
 b) Tính độ dài các cạnh của tam giác.
77. Giải tam giác  $ABC$  biết  
 a)  $a = 6,3$  ;  $b = 6,3$  ;  $\widehat{C} = 54^\circ$ .  
 b)  $a = 7$  ;  $b = 23$  ;  $\widehat{C} = 130^\circ$ .
78. Giải tam giác  $ABC$  biết  
 a)  $c = 14$  ;  $\widehat{A} = 60^\circ$  ;  $\widehat{B} = 40^\circ$ .  
 b)  $c = 35$  ;  $\widehat{A} = 40^\circ$  ;  $\widehat{C} = 120^\circ$ .
79. Giải tam giác  $ABC$  biết  
 a)  $a = 14$  ;  $b = 18$  ;  $c = 20$ .  
 b)  $a = 6$  ;  $b = 7,3$  ;  $c = 4,8$ .
80. Trên ngọn đồi có một cái tháp cao 100m (h. 24). Đỉnh tháp  $B$  và chân tháp  $C$  nhìn điểm  $A$  ở chân đồi dưới các góc tương ứng bằng  $30^\circ$  và  $60^\circ$  so với phương thẳng đứng. Xác định chiều cao  $HA$  của ngọn đồi.
81. Một vật nặng  $P = 100\text{N}$  được treo bằng sợi dây gắn trên trần nhà tại hai điểm  $A, B$  (h. 25). Biết hai đoạn dây tạo với trần nhà các góc  $30^\circ$  và  $45^\circ$ . Tính lực căng của mỗi đoạn dây.



Hình 24



Hình 25