

### §3. Khoảng cách và góc

26. a) Thay lần lượt toạ độ của  $A, B, C$  vào vế trái phương trình của  $\Delta$ , ta được :

$$-1 - 3 = -4; \quad 2 - 2 \cdot 3 - 3 = -7; \quad 3 - 2 \cdot (-6) - 3 = 12.$$

Vậy  $A, B$  nằm về một phía của  $\Delta$ , còn  $C$  nằm về phía kia. Do đó  $\Delta$  cắt hai cạnh  $AC$  và  $BC$  của tam giác  $ABC$ .

b) *Cách 1.* Xét  $M(2y + 3; y) \in \Delta$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-6y - 5; -3y - 3)$ .

$$\text{Khi đó } \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{(6y + 5)^2 + (3y + 3)^2} = \sqrt{45y^2 + 78y + 34}.$$

$$\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow 45y^2 + 78y + 34 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{15}.$$

Từ đó ta tìm được  $M = \left(\frac{19}{15}; -\frac{13}{15}\right)$ .

Cách 2. Do  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$  ( $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ) nên

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}|$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M$  là hình chiếu vuông

góc của  $G$  trên  $\Delta$ . Ta tìm được  $M = \left(\frac{19}{15}; -\frac{13}{15}\right)$ .

27. a)  $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; 2)$ .  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương. Do đó  $A, B, C$  không thẳng hàng và là ba đỉnh của một tam giác.

b) Phương trình đường thẳng  $AB : x - 2y - 2 = 0$ .

Phương trình đường thẳng  $AC : 2x + y - 4 = 0$ .

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc  $A$  là :

$$\frac{x - 2y - 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \pm \frac{2x + y - 4}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 & (1) \\ 3x - y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thay lần lượt toạ độ của  $B$  và  $C$  vào vế trái của (1) ta được :

$$4 + 3.1 - 2 = 5; \quad 1 + 3.2 - 2 = 5.$$

Do đó  $B, C$  cùng phía đối với đường thẳng có phương trình (1), vậy phương trình đường phân giác trong của góc  $A$  là  $3x - y - 6 = 0$ .

c)  $\overrightarrow{BC} = (-3; 1)$ . Phương trình đường thẳng  $BC$  là  $x + 3y - 7 = 0$ .

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc  $B$  là

$$\frac{x - 2y - 2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \pm \frac{x + 3y - 7}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - (2\sqrt{2} + 3)y + 7 - 2\sqrt{2} = 0 & (3) \\ (\sqrt{2} + 1)x + (3 - 2\sqrt{2})y - 7 - 2\sqrt{2} = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay lần lượt toạ độ của  $A$  và  $C$  vào vế trái của (3) ta được :

$$(\sqrt{2} - 1).2 + 7 - 2\sqrt{2} = 5; \quad (\sqrt{2} - 1).1 - (2\sqrt{2} + 3).2 + 7 - 2\sqrt{2} = -5\sqrt{2}.$$

Suy ra phương trình đường phân giác trong của góc  $B$  là

$$(\sqrt{2} - 1)x - (2\sqrt{2} + 3)y + 7 - 2\sqrt{2} = 0.$$

Tâm  $I$  của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác trong. Toạ độ của  $I$  là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - y - 6 = 0 \\ (\sqrt{2} - 1)x - (2\sqrt{2} + 3)y + 7 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \\ y = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I = \left( \frac{5 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}; \frac{3}{2 + \sqrt{2}} \right).$$

28. Xét tam giác  $ABC$  với phương trình các cạnh của tam giác như đã cho. Khi đó, toạ độ các đỉnh của tam giác là nghiệm của các hệ :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải các hệ này ta được toạ độ các đỉnh tam giác là  $(0; 0)$ ,  $(2; -1)$ ;  $(-1; 2)$ .

Giả sử  $A = (0; 0)$ ,  $B = (2; -1)$ ;  $C = (-1; 2)$ . Suy ra

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1), \overrightarrow{AC} = (-1; 2), \overrightarrow{BC} = (-3; 3).$$

$AB = AC = \sqrt{5}$  nên tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \hat{A} \approx 143^\circ 8'$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \approx 18^\circ 26'.$$

29.  $\Delta$  có phương trình tổng quát :  $x + y + 1 = 0$ . Do đó

$$d(A; \Delta) = \frac{|-1 + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Đường tròn tâm  $A$  tiếp xúc với  $\Delta$  nên có bán kính  $R = \sqrt{2}$ . Diện tích của hình tròn này là  $S = \pi R^2 = 2\pi$ .

30. Hai điểm  $M$  và  $N$  đối xứng với nhau qua  $\Delta$  khi và chỉ khi có hai điều kiện :

- Trung điểm  $I$  của  $MN$  nằm trên  $\Delta$  ;
- Vectơ  $\overrightarrow{MN}$  là vectơ pháp tuyến của  $\Delta$ .

Từ đó ta được các điều kiện sau :

$$\begin{cases} a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + c = 0 \\ b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1) = 0. \end{cases}$$

31. a) Ta tìm được tọa độ các đỉnh của tam giác  $ABC$  là :  $A(1 ; 5), B(-3 ; 1), C(2 ; -2)$ .

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc  $A$  là :

$$\frac{x - y + 4}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7x + y - 12}{\sqrt{49 + 1}} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - y + 4) = 7x + y - 12 \\ 5(x - y + 4) = -(7x + y - 12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 16 = 0 & (1) \\ 3x - y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thay lần lượt tọa độ của  $B$  và  $C$  vào vế trái của phương trình (1) ta được :

$$-3 + 3 - 16 = -16 ; \quad 2 - 6 - 16 = -20,$$

suy ra  $B$  và  $C$  ở cùng phía đối với đường thẳng có phương trình (1).

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc  $A$  là :  $3x - y + 2 = 0$ .

b) Thay lần lượt tọa độ của  $O$  vào vế trái phương trình của  $BC, AC, AB$  ta được :

$$4 ; \quad -12 ; \quad 4.$$

Thay tọa độ của  $A, B, C$  lần lượt vào vế trái phương trình của  $BC, AC, AB$  ta được :

$$3 + 5.5 + 4 = 32 ; \quad 7.(-3) + 1 - 12 = -32 ; \quad 2 + 2 + 4 = 8.$$

Như vậy :  $O$  và  $A$  nằm cùng phía đối với  $BC$  ;  $O$  và  $B$  nằm cùng phía đối với  $AC$  ;  $O$  và  $C$  nằm cùng phía đối với  $AB$ . Vậy  $O$  nằm trong tam giác  $ABC$ .

32. a) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(-2 ; 0)$  có phương trình :

$$\alpha(x + 2) + \beta y = 0 \quad \text{hay} \quad \alpha x + \beta y + 2\alpha = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

$$\Delta \text{ tạo với } d \text{ góc } 45^\circ \Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\alpha + 3\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\alpha + 3\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 5(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + 3\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \alpha = -\frac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Với  $\alpha = 2\beta$ , chọn  $\beta = 1, \alpha = 2$ , ta được đường thẳng  $\Delta_1 : 2x + y + 4 = 0$ .

Với  $\alpha = -\frac{1}{2}\beta$ , chọn  $\beta = -2, \alpha = 1$ , ta được đường thẳng  $\Delta_2 : x - 2y + 2 = 0$ .

b) Gọi  $\vec{u}(a; b)$  là vectơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  cần tìm ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ).  
 $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{v} = (3; -2)$ .

$$\Delta \text{ tạo với } d \text{ góc } 60^\circ \text{ khi và chỉ khi } \cos 60^\circ = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow 13(a^2 + b^2) = 4(3a - 2b)^2$$

$$\Leftrightarrow 23a^2 - 48ab + 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{24 - \sqrt{507}}{23}b \\ a = \frac{24 + \sqrt{507}}{23}b. \end{cases}$$

Với  $a = \frac{24 - \sqrt{507}}{23}b$ , chọn  $b = 1, a = \frac{24 - \sqrt{507}}{23}$ , ta được đường thẳng

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = -1 + \frac{24 - \sqrt{507}}{23}t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

Với  $a = \frac{24 + \sqrt{507}}{23}b$ , chọn  $b = 1, a = \frac{24 + \sqrt{507}}{23}$ , ta được đường thẳng

$$\Delta_2 : \begin{cases} x = -1 + \frac{24 + \sqrt{507}}{23}t \\ y = 2 + t. \end{cases}$$

33. Đường thẳng  $\Delta_1 : \begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u}(a; -2)$ , đường thẳng

$\Delta_2 : 3x + 4y + 12 = 0$  có vectơ chỉ phương  $\vec{v}(4; -3)$ . Góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  bằng  $45^\circ$  khi và chỉ khi

$$\cos 45^\circ = \frac{|4a + 6|}{\sqrt{a^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|4a + 6|}{5\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\Leftrightarrow 25(a^2 + 4) = 2(4a + 6)^2 \Leftrightarrow 7a^2 + 96a - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ a = -14. \end{cases}$$

Có hai giá trị cần tìm là  $a = \frac{2}{7}$  và  $a = -14$ .

34. a) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(1; 1)$  có phương trình :

$$\alpha(x - 1) + \beta(y - 1) = 0 \text{ hay } \alpha x + \beta y - \alpha - \beta = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

$$\text{Ta có } d(B; \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|3\alpha + 6\beta - \alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 \Leftrightarrow (2\alpha + 5\beta)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\Leftrightarrow \beta(21\beta + 20\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 21\beta + 20\alpha = 0. \end{cases}$$

Với  $\beta = 0$ , chọn  $\alpha = 1$ , ta được đường thẳng  $\Delta_1 : x - 1 = 0$ .

Với  $21\beta + 20\alpha = 0$ , chọn  $\alpha = 21$ ,  $\beta = -20$  ta được đường thẳng  $\Delta_2 :$

$$21x - 20y - 1 = 0.$$

$$\text{b) } M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow d(M; d) = 5 \Leftrightarrow \frac{|8x - 6y - 5|}{\sqrt{64 + 36}} = 5 \Leftrightarrow 8x - 6y - 5 = \pm 50.$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là

$$\Delta_1 : 8x - 6y + 45 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 8x - 6y - 55 = 0.$$

35. Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  có phương trình :  $\alpha x + \beta y - \alpha - \beta = 0$  ( $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ).

Từ giả thiết  $d(B; \Delta) = d(C; \Delta)$ , ta tìm được  $\alpha = -4\beta$  hoặc  $3\alpha + 2\beta = 0$ .

Suy ra có hai đường thẳng thoả mãn bài toán là  $\Delta_1 :$

$$4x - y - 3 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 2x - 3y + 1 = 0.$$

36. a) Đường thẳng  $AB$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_1(1; 2)$ , đường thẳng  $BC$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_2(3; -1)$ . Đường thẳng  $AC$  qua  $M$  nên có phương trình :  $\alpha(x - 1) + \beta(y + 3) = 0$  ( $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ).

Tam giác  $ABC$  cân tại đỉnh  $A$  nên ta có :

$$\cos(AB, BC) = \cos(AC, BC) \Leftrightarrow \frac{|3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|3\alpha - \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{5}|3\alpha - \beta| \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 5(3\alpha - \beta)^2$$

$$\Leftrightarrow 22\alpha^2 - 15\alpha\beta + 2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\beta \\ \alpha = \frac{2}{11}\beta. \end{cases}$$

Với  $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ , chọn  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 1$ , ta được đường thẳng  $AC : x + 2y + 5 = 0$ .

Trường hợp này bị loại vì khi đó đường thẳng  $AC$  song song với đường thẳng  $AB$ .

Với  $\alpha = \frac{2}{11}\beta$ , chọn  $\beta = 11$ ,  $\alpha = 2$ , ta được đường thẳng  $AC : 2x + 11y + 31 = 0$ .

b) Hãy viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$  và vuông góc với mỗi đường phân giác của các góc tạo bởi  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Ta tìm được hai đường thẳng thoả mãn bài toán là:  $3x + y - 5 = 0$  và  $x - 3y - 5 = 0$ .

37. a) Lấy  $M(x_0 ; y_0)$  thuộc  $\Delta_1$ , suy ra  $ax_0 + by_0 + c = 0$ . Kí hiệu  $d(\Delta_1 ; \Delta_2)$  là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Khi đó ta có :

$$d(\Delta_1 ; \Delta_2) = d(M ; \Delta_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Phương trình đường thẳng  $\Delta_3$  song song với  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có dạng :

$$ax + by + e = 0 \quad (e \neq c, e \neq d).$$

Áp dụng câu a) ta có :

$$d(\Delta_1 ; \Delta_3) = \frac{|c - e|}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; d(\Delta_2 ; \Delta_3) = \frac{|d - e|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\Delta_3$  cách đều hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  khi và chỉ khi

$$d(\Delta_1 ; \Delta_3) = d(\Delta_2 ; \Delta_3) \Leftrightarrow |c - e| = |d - e| \Leftrightarrow \begin{cases} c = d \text{ (loại vì } \Delta_1 \neq \Delta_2) \\ e = \frac{c + d}{2}. \end{cases}$$

Vậy phương trình của  $\Delta_3$  là  $ax + by + \frac{c + d}{2} = 0$ .

Áp dụng : Đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng đã cho có phương trình :

$$-3x + 4y + \frac{-10 + 1}{2} = 0 \text{ hay } -3x + 4y - \frac{9}{2} = 0.$$

38. (h. 101) *Cách 1.* Xem bài 23, chương II.

*Cách 2.* Nhận thấy  $A \notin \Delta : 7x - y + 8 = 0$ .

Vậy  $B, D \in \Delta$ .

$\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u}(1; 7)$ . Phương trình đường chéo  $AC$  là :

$$1(x + 4) + 7(y - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 7y - 31 = 0.$$

Toạ độ giao điểm  $I$  của  $AC$  và  $BD$  là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } I = \left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right). \text{ Suy ra toạ độ của } C$$

là  $(3; 4)$ . Vì  $ABCD$  là hình vuông nên  $AC$  tạo với các đường thẳng  $AB$  và  $AD$  các góc  $45^\circ$ . Đường thẳng  $d$  qua  $A(-4; 5)$  có phương trình :

$$\alpha(x + 4) + \beta(y - 5) = 0 \text{ hay } \alpha x + \beta y + 4\alpha - 5\beta = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

$$d \text{ tạo với } AC \text{ góc } 45^\circ \text{ khi và chỉ khi } \cos 45^\circ = \frac{|\alpha + 7\beta|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\alpha + 7\beta|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Leftrightarrow 12\alpha^2 - 7\alpha\beta - 12\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3}\beta \\ \alpha = -\frac{3}{4}\beta. \end{cases}$$

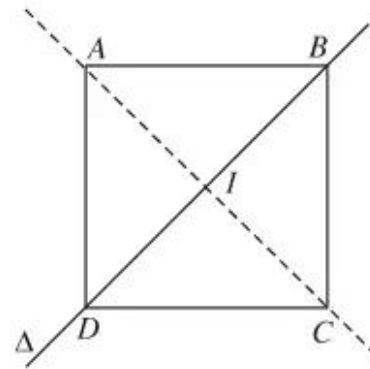
Với  $\alpha = \frac{4}{3}\beta$ , chọn  $\beta = 3$ ,  $\alpha = 4$ , ta được đường thẳng  $d_1: 4x + 3y + 1 = 0$ .

Với  $\alpha = -\frac{3}{4}\beta$ , chọn  $\beta = -4$ ,  $\alpha = 3$ , ta được đường thẳng  $d_2: 3x - 4y + 32 = 0$ .

Lấy phương trình  $AB$  là  $4x + 3y + 1 = 0$  thì phương trình của  $AD$  là

$$3x - 4y + 32 = 0.$$

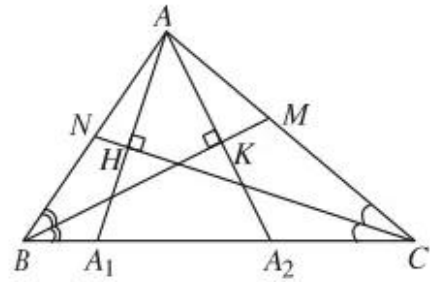
Do đó ta viết được phương trình của  $CD$  và  $BC$  lần lượt là :  $4x + 3y - 24 = 0$  và  $3x - 4y + 7 = 0$ . (Lấy phương trình  $AD$  là  $4x + 3y + 1 = 0$  thì phương trình của  $AB$  là  $3x - 4y + 32 = 0$  và ta cũng có kết quả tương tự).



Hình 101



39. (h. 102) Kẻ  $AH \perp CN$ ,  $AK \perp BM$ . Gọi  $A_1, A_2$  theo thứ tự là giao điểm của  $AH, AK$  với  $BC$ . Khi đó  $H$  là trung điểm của  $AA_1$ ,  $K$  là trung điểm của  $AA_2$ . Ta tìm được toạ độ của  $A_1$  và  $A_2$ . Từ đó viết được phương trình cạnh  $BC$  là  $y + 1 = 0$ .



Hình 102

40. a) Dễ thấy  $P, Q$  nằm về một phía đối với đường thẳng  $\Delta$ . Gọi  $P'$  là điểm đối xứng với  $P$  qua  $\Delta$ , khi đó :

$MP + MQ \geq P'Q$ . Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi  $M, P', Q$  thẳng hàng. Ta tìm được  $P' = (5; 4)$ , phương trình  $P'Q$  là  $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 4 - t \end{cases}$ . Từ đó tìm được  $M = (0; -1)$ .

b) Ta có  $|NP - NQ| \leq PQ$ . Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi  $N, P, Q$  thẳng hàng. Vậy  $N$  chính là giao điểm của đường thẳng  $PQ$  và  $\Delta$ . Ta tìm được  $N = (-9; -19)$ .

41. a)  $\Delta_m$  luôn đi qua điểm cố định  $M(x_0; y_0)$  với mọi  $m$  khi và chỉ khi

$$(m - 2)x_0 + (m - 1)y_0 + 2m - 1 = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + y_0 + 2)m - 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 2 = 0 \\ -2x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

Vậy  $\Delta_m$  luôn đi qua điểm cố định  $M(1; -3)$  với mọi  $m$ .

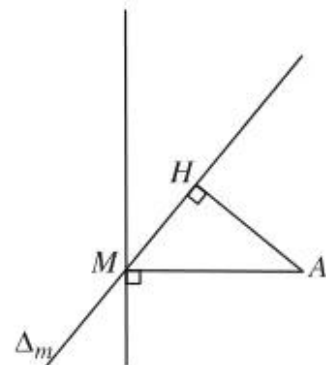
b) Đặt  $f(x, y) = (m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1$ .

$\Delta_m$  có ít nhất một điểm chung với đoạn  $AB \Leftrightarrow f(x_A, y_A) \cdot f(x_B, y_B) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (7m - 8)(3m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{8}{7}.$$

c) (h. 103) Dựng  $AH \perp \Delta_m$ . Ta có  $AH \leq AM$  với mọi  $m$  ( $M$  là điểm thuộc  $\Delta_m$  với mọi  $m$  đã nói ở câu a)). Vậy  $AH$  lớn nhất bằng  $AM$  khi và chỉ khi  $H$  trùng với  $M$  hay  $AM \perp \Delta_m$ .

Ta có :  $\overrightarrow{AM} = (-1; -6)$ ,  $\Delta_m$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1 - m; m - 2)$ .



Hình 103

$$AM \perp \Delta_m \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1 - m) - 6(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{11}{5}.$$

Vậy với  $m = \frac{11}{5}$  thì khoảng cách từ  $A$  đến  $\Delta_m$  là lớn nhất.