

§ . Khoảng cách và góc

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ được tính theo công thức

$$d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Cho hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ và đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Khi đó M và N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$; M và N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

3. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Khi đó

- Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

- Góc giữa Δ_1 và Δ_2 được xác định bởi công thức

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

II – ĐỀ BÀI

26. Cho tam giác ABC với $A = (-1 ; 0), B = (2 ; 3), C = (3 ; -6)$ và đường thẳng $\Delta : x - 2y - 3 = 0$.

a) Xét xem đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác.

b) Tìm điểm M trên Δ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

27. Cho ba điểm $A(2 ; 0), B(4 ; 1), C(1 ; 2)$
- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
 - Viết phương trình đường phân giác trong của góc A .
 - Tìm toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
28. Tìm các góc của một tam giác biết phương trình các cạnh tam giác đó là :
- $$x + 2y = 0; 2x + y = 0; x + y = 1.$$
29. Cho điểm $A = (-1 ; 2)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t. \end{cases}$
- Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ . Từ đó suy ra diện tích của hình tròn tâm A tiếp xúc với Δ .
30. Với điều kiện nào thì các điểm $M(x_1 ; y_1)$ và $N(x_2 ; y_2)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$?
31. Biết các cạnh của tam giác ABC có phương trình :
- $$AB : x - y + 4 = 0; BC : 3x + 5y + 4 = 0; AC : 7x + y - 12 = 0.$$
- Viết phương trình đường phân giác trong của góc A ;
 - Không dùng hình vẽ, hãy cho biết gốc toạ độ O nằm trong hay nằm ngoài tam giác ABC .
32. Viết phương trình đường thẳng
- Qua $A(-2 ; 0)$ và tạo với đường thẳng $d : x + 3y - 3 = 0$ một góc 45° ;
 - Qua $B(-1 ; 2)$ và tạo với đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$ một góc 60° .
33. Xác định các giá trị của a để góc tạo bởi hai đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ và $3x + 4y + 12 = 0$ bằng 45° .
34. a) Cho hai điểm $A(1 ; 1)$ và $B(3 ; 6)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách B một khoảng bằng 2.
 b) Cho đường thẳng d có phương trình $8x - 6y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và cách d một khoảng bằng 5.
35. Cho ba điểm $A(1 ; 1), B(2 ; 0), C(3 ; 4)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách đều hai điểm B, C .

36. a) Cho tam giác ABC cân tại A , biết phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là $x + 2y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng đường thẳng AC đi qua điểm $M(1; -3)$.
- b) Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x - y + 5 = 0$, $\Delta_2 : 3x + 6y - 1 = 0$ và điểm $M(2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của Δ_1 và Δ_2 .

37. Cho hai đường thẳng song song $\Delta_1 : ax + by + c = 0$ và $\Delta_2 : ax + by + d = 0$.

Chứng minh rằng

a) Khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $\frac{|c - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

b) Phương trình đường thẳng song song và cách đều Δ_1 và Δ_2 có dạng

$$ax + by + \frac{c + d}{2} = 0.$$

Áp dụng. Cho hai đường thẳng song song có phương trình $-3x + 4y - 10 = 0$ và $-3x + 4y + 1 = 0$. Hãy lập phương trình đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng trên.

38. Cho hình vuông có đỉnh $A = (-4; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

39. Cho tam giác ABC có đỉnh $A = \left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$. Hai đường phân giác trong của góc B và C lần lượt có phương trình $x - 2y - 1 = 0$ và $x + 3y - 1 = 0$. Viết phương trình cạnh BC của tam giác.

40. Cho hai điểm $P(1; 6), Q(-3; -4)$ và đường thẳng $\Delta : 2x - y - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm M trên Δ sao cho $MP + MQ$ nhỏ nhất ;

b) Tìm toạ độ điểm N trên Δ sao cho $|NP - NQ|$ lớn nhất.

41. Cho đường thẳng $\Delta_m : (m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 3), B(1; 0)$.

a) Chứng minh rằng Δ_m luôn đi qua một điểm cố định với mọi m ;

b) Xác định m để Δ_m có ít nhất một điểm chung với đoạn thẳng AB ;

c) Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ_m là lớn nhất.