§4. Đường tròn

42. a) $I(-4\ ;\ 2), R = \sqrt{7}$; d) $I(5\ ;\ 5), R = \sqrt{105}$;

b) $I(5\ ;\ -7),\ R = \sqrt{15}$; e) $I(-4\ ;\ 3), R = \sqrt{17}$;

c) $I(3\ ;\ 2),\ R = 7$; f) $I(-2\ ;\ -5), R = \sqrt{14}$.

43. a) *Cách 1*. Đường tròn đường kính AB nhận trung điểm I của AB là tâm và có bán kính $R = \frac{1}{2}AB$.

Ta có : $I = (4\ ;\ 2), R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-7)^2 + (7+3)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{34} = \sqrt{34}$.

Phương trình đường tròn là

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 34 \text{ hay } x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0.$$

Cách 2. Điểm $M(x\ ;\ y)$ thuộc đường tròn đường kính $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x-1) + (y+3)(y-7) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0$.

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 14 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 29 = 0$.

44. Gọi $I(x\ ;\ y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có :

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-6)^2 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-7)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 51 \\ 12x - 6y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{9}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right).$$

Bán kính đường tròn : $R = IA = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

45. Toạ độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A = (-2\ ;\ 3).$

Tương tự, ta tính được $B(2\ ;\ 0)$, $C\left(\dfrac{1}{4}\ ;0\right)$.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A là

$$\frac{3x + 4y - 6}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm\frac{4x + 3y - 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y + 5 = 0 & (1) \\ x + y - 1 = 0 & (2). \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của B, C vào vế trái của (1), ta được : $2 + 5 = 7 > 0$; $\dfrac{1}{4} + 5 > 0.$

Vậy (2) là phương trình đường phân giác trong của góc A.

Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc B là

$$\frac{3x + 4y - 6}{5} = \pm y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x - y - 6 = 0 & (3) \\ x + 3y - 2 = 0 & (4). \end{array}\right.$$

Thay lần lượt toạ độ của A, C vào vế trái của (4), ta được : $-2 + 3.3 - 2 = 5 > 0$; $\dfrac{1}{4} - 2 = -\dfrac{7}{4} < 0.$ Vậy (4) là phương trình đường phân giác trong của góc B.

Gọi $I(x\ ;\ y)$ và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó toạ độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right).$

$r = d(I\ ;\ BC) = \dfrac{1}{2}$. Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

46.
- $0 < m < \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta_m$ không có điểm chung với $(\mathscr{C})$.
- $m < 0$ hoặc $m > \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta_m$ cắt $(\mathscr{C})$.
- $m = 0$ hoặc $m = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta_m$ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$.

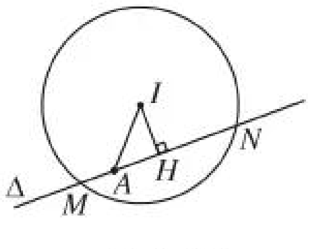
47. a) Xét điểm $M(x\ ;\ y)$. Biến đổi điều kiện $3MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ qua toạ độ ta được phương trình đường tròn cần tìm $(\mathscr{C})$: $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{107}{4}$.

$(\mathscr{C})$ có tâm $I\left(-\frac{9}{2}\ ;\ 1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{107}}{2}$.

b) (h. 104) $IA < R$ nên A nằm trong $(\mathscr{C})$. Gọi H là trung điểm của MN thì $IH \perp MN$.

$MN = 2MH = 2\sqrt{R^2 - IH^2}$.

Do đó MN min $\Leftrightarrow IH$ max.



Hình 104

Ta luôn có $IH \le IA$. Vậy IH max $\Leftrightarrow H \equiv A$, tức là $\overrightarrow{IA} = \left(\frac{7}{2}\ ;\ -1\right)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ cần tìm. Từ đó suy ra phương trình của Δ là $7x - 2y + 7 = 0$.

48. Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$, tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính R có dạng

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox, Oy khi và chỉ khi $|a| = |b| = R$. Phương trình của $(\mathscr{C})$ trở thành

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2.$$

a) $A(2\ ;\ -1) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow (2-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$. (1)

• Với $a = b$ thì (1) $\Leftrightarrow (2-a)^2 + (1+a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$, phương trình vô nghiệm.

• Với $a = -b$ thì (1) $\Leftrightarrow (2-a)^2 + (a-1)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$

$\Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = 5$.

– Khi $a = 1 \Rightarrow b = -1, R = 1$, ta được đường tròn $(\mathscr{C}_1) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

– Khi $a = 5 \Rightarrow b = -5, R = 5$ ta được đường tròn $(\mathscr{C}_2) : (x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

b) I thuộc đường thẳng $3x - 5y - 8 = 0$ nên $3a - 5b - 8 = 0$. (2)

• Với $a = b$ thì (2) $\Leftrightarrow 3a - 5a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow b = -4, R = 4$.

Ta được đường tròn $(\mathscr{C}_1) : (x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$.

• Với $a = -b$ thì (2) $\Leftrightarrow 3a - 5.(-a) - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -1, R = 1$.

Ta được đường tròn $(\mathscr{C}_2) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

49. Đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm $I(a\,;b)$, bán kính R có phương trình :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1)$$

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox tại $A(6\,;0)$ nên $a = 6$, $|b| = R$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-b)^2 = b^2.$$

$B(9\,;9) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow (9-6)^2 + (9-b)^2 = b^2 \Leftrightarrow b = 5 \Rightarrow R = 5$.

Phương trình của $(\mathscr{C})$ là $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$.

50. Gọi $I(a\,;b)$ và R là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$ cần tìm. Phương trình của $(\mathscr{C})$ là $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

$(\mathscr{C})$ tiếp xúc với $\Delta : x - y - 1 = 0$ khi và chỉ khi $d(I\,;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|a-b-1|}{\sqrt{2}} = R$.

$$A, B \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \begin{cases}(-1-a)^2 + b^2 = R^2\\(1-a)^2 + (2-b)^2 = R^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+1)^2 + b^2 = \dfrac{(a-b-1)^2}{2} & (1)\\[2ex](a-1)^2 + (b-2)^2 = \dfrac{(a-b-1)^2}{2} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $(a+1)^2 + b^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow a = 1 - b$.

Thay $a = 1 - b$ vào (2), ta có :

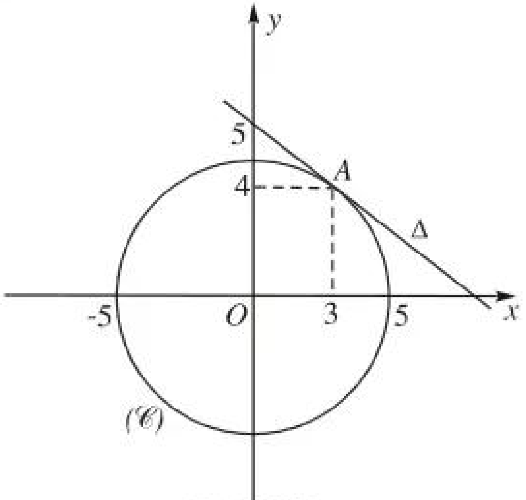
$$b^2 + (b-2)^2 = 2b^2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 0, R = \sqrt{2}.$$

Phương trình của $(\mathscr{C})$ là $x^2 + (y-1)^2 = 2$.

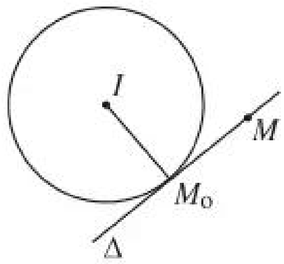
51. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0\,;0)$, bán kính $R = 5$. Tiếp tuyến Δ đi qua A, nhận $\overrightarrow{OA}(3\,;4)$ làm vectơ pháp tuyến, nên có phương trình :

$$3(x-3) + 4(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0.$$

Đường tròn ($\mathscr{C}$) và tiếp tuyến Δ được vẽ như hình 105. Các câu b), c), d), e), f) : học sinh tự làm.



Hình 105



Hình 106

52. (h. 106) ($\mathscr{C}$) có tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính R. Khi đó :

$$M(x\ ;\ y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_0}.\overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a + a - x_0) + (y_0 - b)(y - b + b - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - [(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2.$$

53. ($\mathscr{C}$) có tâm $I(1\ ;\ -3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 3^2 - 5} = \sqrt{5}$.

$\Delta \,//\, d \Rightarrow \Delta$ có phương trình : $2x + y + m = 0$ ($m \neq -1$). Δ tiếp xúc với ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow$

$$d(I\ ;\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 3 + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m - 1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = -4. \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến cần tìm là $\Delta_1 : 2x + y + 6 = 0$ và $\Delta_2 : 2x + y - 4 = 0$.

Toạ độ tiếp điểm M của Δ_1 với ($\mathscr{C}$) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4. \end{cases} \text{ Vậy } M = (-1\ ;\ -4).$$

Toạ độ tiếp điểm N của Δ_2 với ($\mathscr{C}$) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases} \text{ Vậy } N = (3\ ;\ -2).$$

Chú ý. Khi biết toạ độ của M, thì do M và N đối xứng nhau qua I, ta có thể tính ngay được toạ độ của $N = (2x_I - x_M\ ;\ 2y_I - y_M)$.

54. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(3\ ;\ -1)$, bán kính $R = 2$.

$$IA = \sqrt{(1-3)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5} > R, \text{ suy ra } A \text{ nằm ngoài } (\mathscr{C}).$$

b) A nằm ngoài $(\mathscr{C})$ nên từ A ta kẻ được hai tiếp tuyến đến $(\mathscr{C})$.

Cách 1. Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình :

$$\alpha(x-1) + \beta(y-3) = 0 \text{ hay } \alpha x + \beta y - \alpha - 3\beta = 0\ (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I\ ;\ \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3\alpha - \beta - \alpha - 3\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2$

$\Leftrightarrow |\alpha - 2\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow \beta(3\beta - 4\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \beta = 0 \\ \beta = \dfrac{4}{3}\alpha. \end{array}\right.$

- Với $\beta = 0$, chọn $\alpha = 1$, ta được tiếp tuyến thứ nhất : $x - 1 = 0$.
- Với $\beta = \dfrac{4}{3}\alpha$, chọn $\alpha = 3$, $\beta = 4$, ta được tiếp tuyến thứ hai : $3x + 4y - 15 = 0$.

Cách 2. • Xét đường thẳng Δ đi qua A và có hệ số góc k. Phương trình của Δ là :

$$y = k(x-1) + 3 \text{ hay } kx - y + 3 - k = 0.$$

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I\ ;\ \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3k + 1 + 3 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$

$\Leftrightarrow |k + 2| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow k^2 + 4k + 4 = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{4}.$

Ta được tiếp tuyến thứ nhất $\Delta_1 : y = -\dfrac{3}{4}(x-1) + 3$ hay $3x + 4y - 15 = 0$.

• Xét đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với Ox. Khi đó, Δ có phương trình $x = 1$ hay $x - 1 = 0$.

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(I\ ;\ \Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3-1|}{\sqrt{1}} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$. Đẳng thức cuối đúng nên Δ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$. Ta có tiếp tuyến thứ hai $\Delta_2 : x - 1 = 0$.

Chú ý. Trong cách giải 2, nếu chỉ xét trường hợp tiếp tuyến Δ có hệ số góc thì bài toán sẽ mất nghiệm.

c) Học sinh tự làm.

55. a) $\Delta : 4x + 3y - 11 = 0$.

b) Có hai tiếp tuyến là $\Delta_1 : 4x + 3y + 39 = 0$ và $\Delta_2 : 4x + 3y - 11 = 0$.

c) Có hai tiếp tuyến : $\Delta_1 : y = \dfrac{-32 + 5\sqrt{55}}{9}(x - 2) + 6$,

$$\Delta_2 : y = \frac{-32 - 5\sqrt{55}}{9}(x - 2) + 6.$$

56. a) $(\mathscr{C}_1)$ có tâm $I_1(2 ; 4)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2^2 + 4^2 - 11} = 3$.

$(\mathscr{C}_2)$ có tâm $I_2(1 ; 1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2} = 2$.

$$1 = |R_1 - R_2| < I_1I_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10} < R_1 + R_2 = 5.$$

Suy ra $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau.

b) (h. 107) Theo câu a), $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau nên chúng có hai tiếp tuyến chung. Tiếp tuyến chung Δ có phương trình : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 > 0)$.

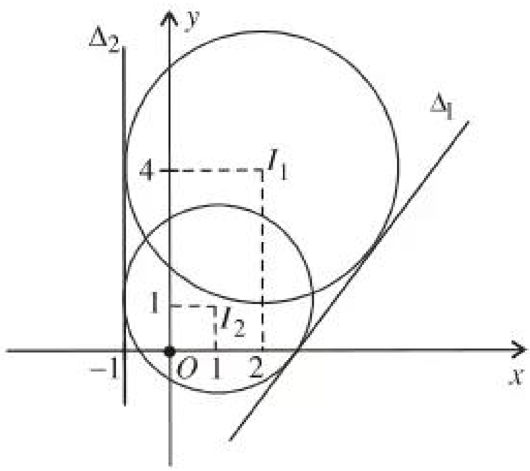
Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} d(I_1 ; \Delta) = R_1 \\ d(I_2 ; \Delta) = R_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2\alpha + 4\beta + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 3 & (1) \\ \dfrac{|\alpha + \beta + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 & (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow 2|2\alpha + 4\beta + \gamma| = 3|\alpha + \beta + \gamma|$

$\Leftrightarrow 4\alpha + 8\beta + 2\gamma = \pm(3\alpha + 3\beta + 3\gamma)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \gamma = \alpha + 5\beta \\ \gamma = -\dfrac{7\alpha + 11\beta}{5}. \end{array}\right.$$



Hình 107

– Thay $\gamma = \alpha + 5\beta$ vào (2) ta có :

$\dfrac{|2\alpha + 6\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$

$\Leftrightarrow 2\beta(4\beta + 3\alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ hoặc $4\beta = -3\alpha$.

Với $\beta = 0$ (do đó $\alpha \neq 0$), suy ra $\gamma = \alpha$. Ta có tiếp tuyến chung thứ nhất

$$\Delta_1 : \ \alpha x + \alpha = 0 \text{ hay } x + 1 = 0.$$

Với $4\beta = -3\alpha$, chọn $\alpha = 4$, $\beta = -3$, ta được $\gamma = -11$. Ta có tiếp tuyến chung thứ hai $\Delta_2 : \ 4x - 3y - 11 = 0$.

– Thay $\gamma = -\dfrac{7\alpha + 11\beta}{5}$ vào (2) ta có :

$$\frac{|2\alpha + 6\beta|}{5\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2 \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)^2 = 25(\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow 12\alpha^2 - 3\alpha\beta + 8\beta^2 = 0,$$

phương trình vô nghiệm.

Vậy $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có hai tiếp tuyến chung là $\Delta_1 : x + 1 = 0$ và $\Delta_2 : \ 4x - 3y - 11 = 0$.

57. Đặt $M = (x ; y)$, ta có $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + \ldots + k_nMA_n^2 = k$

$\Leftrightarrow \ [k_1(x - x_1)^2 + k_2(x - x_2)^2 + \ldots + k_n(x - x_n)^2] \ + [k_1(y - y_1)^2 + k_2(y - y_2)^2 + \ldots + k_n(y - y_n)^2] = k$

$\Leftrightarrow (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x^2 + y^2) - 2(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n)x$

$- 2(k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n)y + k_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + k_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + \ldots +$

$+ k_n(x_n^2 + y_n^2) = k.$ (1)

Đặt $a = \dfrac{k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$, $b = \dfrac{k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots + k_ny_n}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$,

$$c = \frac{k_1(x_1^2 + y_1^2) + k_2(x_2^2 + y_2^2) + \ldots + k_n(x_n^2 + y_n^2) - k}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}.$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$

– Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $I(a ; b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

– Nếu $a^2 + b^2 - c = 0$ thì tập hợp các điểm M là điểm $I(a ; b)$.

– Nếu $a^2 + b^2 - c < 0$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng.

Chú ý rằng : câu a) của bài 47 chương III là một trường hợp đặc biệt của bài này.

58. a) Phương trình $(\mathscr{C}_m)$ có dạng $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

với $a = \frac{m+2}{2}$, $b = -\frac{m+4}{2}$, $c = m + 1$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - (m+1) = \frac{m^2 + 4m + 8}{2} > 0$

với mọi m. Vậy $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn với mọi giá trị của m.

b) Toạ độ tâm I_m của đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ là $\begin{cases} x = -\frac{m+2}{2} \\ y = \frac{m+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -(m+2) & (1) \\ 2y = m+4 & (2) \end{cases}$

Cộng từng vế của (1) và (2), ta được $2x + 2y = 2$ hay $x + y - 1 = 0$.

Vậy tập hợp tâm của các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ là đường thẳng có phương trình :

$$x + y - 1 = 0.$$

c) Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định mà họ $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua. Khi đó ta có :

$x_0^2 + y_0^2 + (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 = 0 \ \forall\, m$

$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 + 1)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \ \forall\, m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 & (1) \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $x_0 = y_0 - 1$, thay vào (2), ta được :

$(y_0 - 1)^2 + y_0^2 + 2(y_0 - 1) - 4y_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y_0^2 - 4y_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0 = 2. \end{array}\right.$

Với $y_0 = 0$ thì $x_0 = -1$. Ta được điểm $M_1(-1 ; 0)$.

Với $y_0 = 2$ thì $x_0 = 1$. Ta được điểm $M_2(1 ; 2)$.

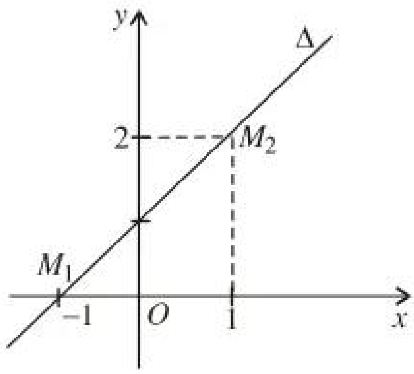
Vậy họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định là $M_1(-1 ; 0)$ và $M_2(1 ; 2)$.

d) (h. 108) $(\mathscr{C}_m)$ không đi qua điểm $(x_1\,;\,y_1)$ với mọi m khi và chỉ khi phương trình (ẩn m) : $(x_1 - y_1 + 1)m + x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 - 4y_1 + 1 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 - 4y_1 + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 1 \\ x_1 \neq \pm 1. \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ mà họ $(\mathscr{C}_m)$ không bao giờ đi qua với mọi giá trị của m là đường thẳng Δ có phương trình $y = x + 1$, bỏ đi hai điểm $M_1(-1\,;\,0)$ và $M_2(1\,;\,2)$.



Hình 108