§4. Tích của một vectơ với một số

11. Ta có $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}$.

12. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ với $m \neq 0$, ta có $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b}$, suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì có thể viết $m\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0}$ với $m \neq 0$.

Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì có số m sao cho $\vec{b} = m\vec{a}$ tức là $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$, trong đó $n = -1 \neq 0$.

Vậy điều kiện cần và đủ để $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương là nếu $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ thì $m = n = 0$.

13. Vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ có độ dài bằng nhau nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Lại vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ nên O là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra ABC là tam giác đều. Vậy các góc AOB, BOC, COA đều bằng 120°.

14. • Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$. Khi đó có thể viết $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, với $\alpha = m$, $\beta = n$, $\gamma = 0$.

• Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương thì có các số α, β sao cho $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, hay có thể viết $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ với $\gamma = -1$.

15. a) Theo giả thiết : $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$, thì với mọi điểm I', ta có

$$\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'A} = t\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'B}\right) + (1-t)\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'C}\right) = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{II'}.$$

Suy ra $\overrightarrow{I'A} = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C}$.

b) Nếu ta chọn I' trùng với A thì có $\vec{0} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$, đó là điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

16. a) Nếu $k \le 0$ thì M nằm giữa A và B, hoặc trùng với A.

Nếu $0 < k < 1$ thì A nằm giữa M và B.

Nếu $k > 1$ thì B nằm giữa A và M.

Nếu $k = -1$ thì M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Theo giả thiết : $k \ne 0$ và $k \ne 1$, ta có

M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow M$ chia đoạn thẳng BA theo tỉ số $\frac{1}{k}$.

c) • M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)$ hay $\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A$ chia đoạn thẳng MB theo tỉ số $\frac{k}{k-1}$.

• M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MB}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow B$ chia đoạn thẳng MA theo tỉ số $\frac{1}{1-k}$.

d) M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$ (trong đó O là điểm bất kì)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

17. Gọi G là trọng tâm tam giác MNP thì ta có

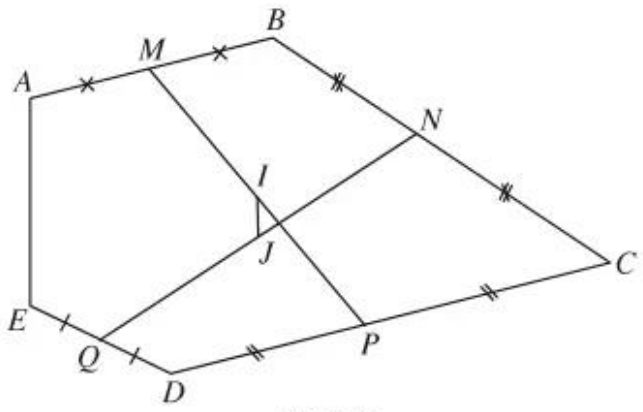
$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{GA} - k\overrightarrow{GB}}{1-k} + \frac{\overrightarrow{GB} - k\overrightarrow{GC}}{1-k} + \frac{\overrightarrow{GC} - k\overrightarrow{GA}}{1-k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Vậy G cũng là trọng tâm tam giác ABC.

18. (h. 7) Ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} \\ &= \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} \\ &= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$



Hình 7

Vậy $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Suy ra $IJ // AE$ và $IJ = \frac{1}{4}AE$.

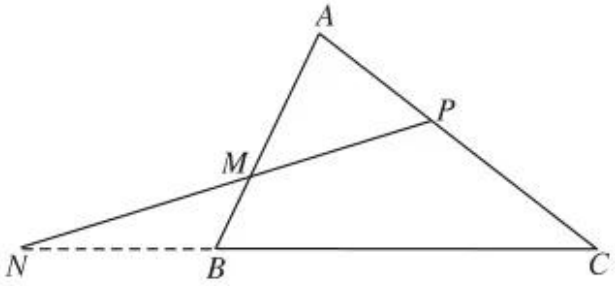
19. a) (h. 8)

Lấy một điểm O nào đó, ta có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB}}{1-m};$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OC}}{1-n};$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OA}}{1-p}.$$



Hình 8

Để đơn giản tính toán, ta chọn điểm O trùng với điểm C.

Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}; \ \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1-n}; \ \overrightarrow{CP} = \frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}. \qquad (1).$$

Từ hai đẳng thức cuối của (1), ta có :

$$\overrightarrow{CB} = (1-n)\overrightarrow{CN}, \quad \overrightarrow{CA} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

và thay vào đẳng thức đầu của (1), ta được :

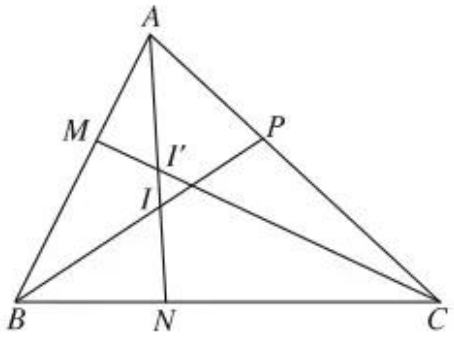
$$\overrightarrow{CM} = \frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP} - \frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}.$$

Từ bài toán 15b) ta suy ra điều kiện cần và đủ để ba điểm M, N, P thẳng hàng là :

$$\frac{p-1}{p(1-m)} - \frac{m(1-n)}{1-m} = 1 \Leftrightarrow p - 1 - pm(1-n) = p(1-m) \Leftrightarrow mnp = 1.$$

b) (h. 9)

Giả sử AN cắt BP tại I và giả sử I chia đoạn thẳng AN theo tỉ số x. Như vậy ba điểm P, I, B thẳng hàng và lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác CAN. Ta có P chia đoạn thẳng CA theo tỉ số p, I chia đoạn AN theo tỉ số x, B chia đoạn NC theo tỉ số $\frac{n}{n-1}$ (suy từ giả thiết N chia đoạn BC theo tỉ số n). Vậy theo định lí Mê-nê-la-uýt ta có $p.x.\frac{n}{n-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{n-1}{np}$.



Hình 9

Giả sử AN cắt CM tại I', và I' chia AN theo tỉ số x'. Như vậy ba điểm I', C, M thẳng hàng và lần lượt nằm trên ba cạnh của tam giác ANB. Ta có : I' chia đoạn AN theo tỉ số x', C chia đoạn NB theo tỉ số $\frac{1}{1-n}$, M chia đoạn BA theo tỉ số $\frac{1}{m}$. Vậy áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt, ta có :

$$x' \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow x' = m(1-n).$$

Ba đường thẳng AN, BP, CM đồng quy khi và chỉ khi I trùng I' hay $x = x'$, có nghĩa là :

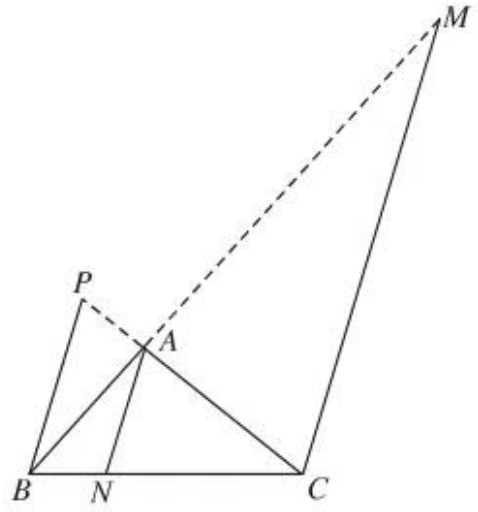
$$\frac{n-1}{np} = m(1-n) \Leftrightarrow mnp = -1.$$

+) Xét trường hợp AN và BP song song (h. 10). Ta có :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{1-n}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \ ;$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CB} = \frac{p}{p-1}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}.$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{1-m}\overrightarrow{CA} - \frac{m}{1-m}\overrightarrow{CB}.$$



Hình 10

Do $AN // BP$ nên

$$\frac{1}{1-n} : (-1) = -1 : \frac{p}{p-1} \Leftrightarrow \frac{1}{1-n} = \frac{p-1}{p}$$

$$\Leftrightarrow p = (1-n)(p-1) \Leftrightarrow np = n-1. \qquad (*)$$

Khi đó điều kiện cần và đủ để AN, BP và CM song song với nhau là $\overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$. Vì $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}$, nên $\overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AN}$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{1-n} : (-m) = -1 \Leftrightarrow m(n-1) = -1.$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra $mnp = -1$.

20. Ta gọi k, l, m là các số sao cho $\overrightarrow{A_1B} = k\overrightarrow{A_1C}$; $\overrightarrow{B_1C} = l\overrightarrow{B_1A}$; $\overrightarrow{C_1A} = m\overrightarrow{C_1B}$.

Chú ý rằng ba điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt đối xứng với ba điểm A_2, B_2, C_2 qua trung điểm đoạn thẳng BC, CA, AB nên ta có

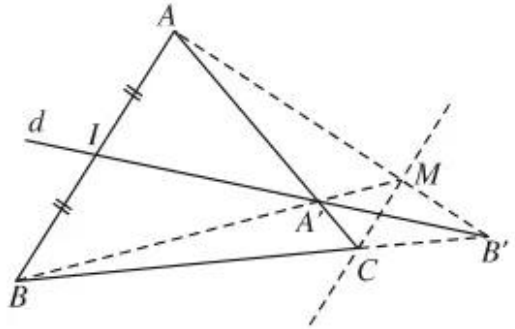
$$\overrightarrow{A_2C} = k\overrightarrow{A_2B}, \quad \overrightarrow{B_2A} = l\overrightarrow{B_2C} \ ; \quad \overrightarrow{C_2B} = m\overrightarrow{C_2A}.$$

Từ đó bằng cách áp dụng định lí thuận và đảo của định lí Mê-nê-la-uýt (hoặc Xê-va) ta chứng minh được câu a) (hoặc câu b)).

21. (h. 11)

Đặt $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$.

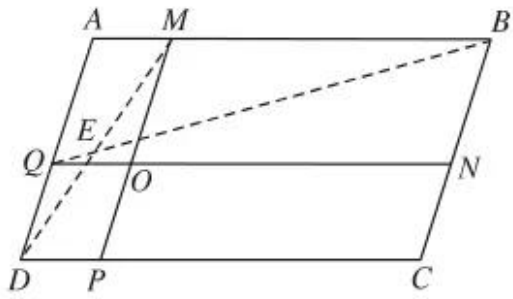
Xét tam giác ABB' với ba đường đồng quy là AC, BM và $B'I$ (đồng quy tại A'). Vì



Hình 11

$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ nên theo định lí Xê-va, ta có $-mn = -1$ hay $mn = 1$. Từ $\overrightarrow{MB'} = n\overrightarrow{MA}$ ta suy ra $m\overrightarrow{MB'} = mn\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}$. Vậy ta có $\overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{CB'}$ và $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB'}$, điều này chứng tỏ rằng $CM \,//\, AB$. Vậy điểm M luôn nằm trên đường thẳng cố định đi qua C và song song với AB.

22. (h. 12) Xét tam giác ABQ và ba điểm thẳng hàng M, E, D. Giả sử M chia AB theo tỉ số m, E chia BQ theo tỉ số n và D chia QA theo tỉ số p, theo định lí Mê-nê-la-uýt ta có $mnp = 1$.



Hình 12

Xét tam giác QNB và ba điểm O, E, C. Khi đó O chia QN theo tỉ số m, C chia NB theo tỉ số n và E chia BQ theo tỉ số p. Vì $mnp = 1$ nên ba điểm O, E, C thẳng hàng.

Cũng chứng minh tương tự, ta có ba điểm F, O, A thẳng hàng. Vậy để ba điểm E, O, F thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là năm điểm A, C, E, F, O thẳng hàng, hay điểm O phải nằm trên đường chéo AC của hình bình hành đã cho.

23. (h. 13) Với điểm G bất kì ta có :

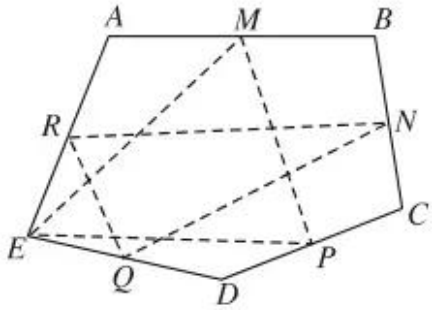
$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + \overrightarrow{GE}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GA})$$

$$= \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR}.$$

Vậy $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

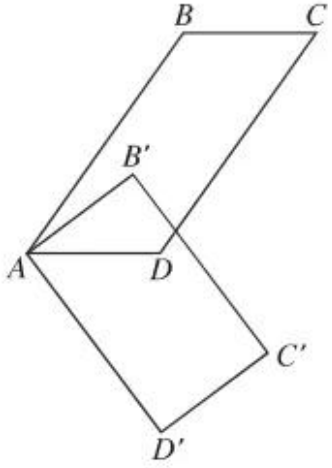
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}.$$



Hình 13

Suy ra trọng tâm hai tam giác MPE và NQR trùng nhau.

24. (h. 14)



Hình 14

a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'}$

$= \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD}$

$= \left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right) - \overrightarrow{AC'} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Với điểm G bất kì ta có

$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD}$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{D'D}$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} + \left(\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}\right)$

$= \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'}$.

Suy ra : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$.

Vậy trọng tâm hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ trùng nhau.

25. a) • $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA} + 3\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

• $-2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BA}.$

• $\overrightarrow{RA} - 3\overrightarrow{RB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{RA} - 3\left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$

b) • $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right) + 3\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\ ;$$

• $-2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}\right) + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\ ;$$

• $\overrightarrow{RA} - 3\overrightarrow{RB} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OR}\right) - 3\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OR}\right) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}.$$

26. Ta có : $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M \in d.$

Vì $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0 \le \alpha \le 1$.

27. Lấy hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ thì theo bài 26, ta có $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1 - m)\vec{v}$ khi và chỉ khi M nằm trên đường thẳng AB.

28. Vì I nằm trên $A'B$ và AB' nên có các số x và y sao cho :

$$\overrightarrow{CI} = x\overrightarrow{CA'} + (1 - x)\overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{CA} + (1 - y)\overrightarrow{CB'}$$

hay $x.m\vec{a} + (1 - x)\vec{b} = y\vec{a} + (1 - y)n\vec{b}$.

Vì hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên từ đẳng thức cuối cùng ta suy ra :

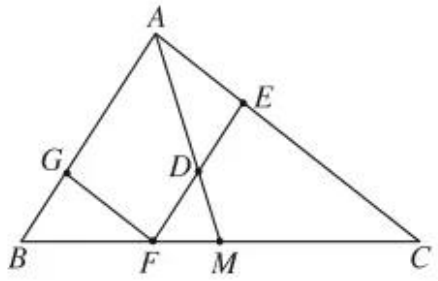
$mx = y$ và $(1 - x) = n(1 - y)$. Từ đó ta có $1 - x = n(1 - mx) = n - mnx$

hay $x = \dfrac{1 - n}{1 - mn}$.

Vậy $\overrightarrow{CI} = \dfrac{m(1 - n)}{1 - mn}\vec{a} + \left(1 - \dfrac{1 - n}{1 - mn}\right)\vec{b} = \dfrac{m(1 - n)}{1 - mn}\vec{a} + \dfrac{n(1 - m)}{1 - mn}\vec{b}$.

29. (h. 15)

Ta đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\vec{b}}{2}$.



Hình 15

Vì E nằm trên đoạn thẳng AC nên có số k sao cho $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$, với $0 < k < 1$. Khi đó $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB} = k\vec{b}$.

Điểm D nằm trên AM và EF nên có hai số x và y sao cho

$$\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CA} + (1 - x)\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{CE} + (1 - y)\overrightarrow{CF}$$

hay $$x\vec{a} + \frac{1 - x}{2}\vec{b} = ky\vec{a} + k(1 - y)\vec{b}.$$

Vì hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên $x = ky$ và $\dfrac{1 - x}{2} = k(1 - y)$. Suy ra $x = 2k - 1$, do đó $\overrightarrow{CD} = (2k - 1)\vec{a} + (1 - k)\vec{b}$.

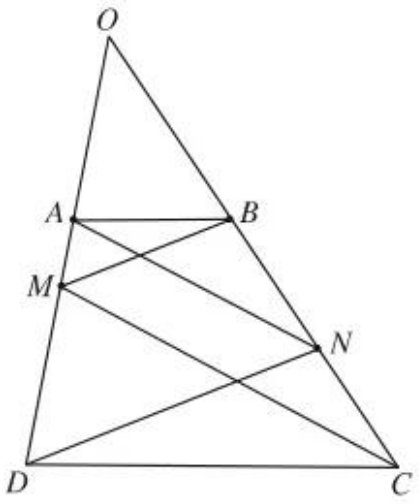
Ta có :

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE} = (2k - 1)\vec{a} + (1 - k)\vec{b} - k\vec{a} = (1 - k)(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - k)\overrightarrow{AB}$.

Chú ý rằng vì $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB}$ nên $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{AB}$, suy ra $(1 - k)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$.

Do đó $ED = GB$. Như vậy, hai tam giác ADE và BFG có các cạnh đáy ED và GB bằng nhau, chiều cao bằng nhau (bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song) nên có diện tích bằng nhau.

30. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC (h. 16).



Hình 16

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OD} = k\vec{a}$, khi đó $\overrightarrow{OC} = k\vec{b}$ (vì $AB // DC$). Giả sử $\overrightarrow{OM} = m\vec{a}$. Ta xác định điểm N trên BC sao cho $AN // CM$. Ta chứng minh rằng $DN // BM$.

Vì N nằm trên BC nên $\overrightarrow{ON} = n\vec{b}$. Khi đó

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = n\vec{b} - \vec{a}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = m\vec{a} - k\vec{b}$.

Vì $AN // CM$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CM}$ cùng phương, tức là $\frac{n}{-k} = \frac{-1}{m}$ hay $n = \frac{k}{m}$. Vậy $\overrightarrow{ON} = \frac{k}{m}\vec{b}$. Từ đó $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OD} = \frac{k}{m}\vec{b} - k\vec{a}$. Lại có

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = m\vec{a} - \vec{b} = -\frac{m}{k}\left(\frac{k}{m}\vec{b} - k\vec{a}\right) = -\frac{m}{k}\overrightarrow{DN}.$$

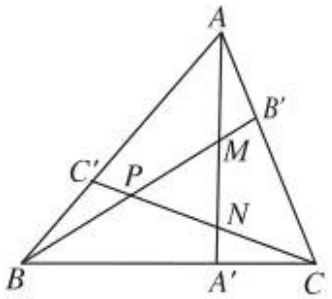
Vậy $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ cùng phương, hay $DN // BM$.

31. (h. 17)

a) Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Theo giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{CA'} = \frac{\overrightarrow{CB}}{3} = \frac{\vec{b}}{3}; \qquad \overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2\vec{a}}{3};$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}.$$



Hình 17

Vì M là giao điểm của AA' và BB' nên có các số x và y sao cho :

$$\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CA} + (1 - x)\overrightarrow{CA'} = y\overrightarrow{CB} + (1 - y)\overrightarrow{CB'},$$

hay : $x\vec{a} + (1-x)\dfrac{\vec{b}}{3} = y\vec{b} + (1-y)\dfrac{2\vec{a}}{3}$.

Vì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên từ đẳng thức trên ta suy ra

$$x = \frac{2(1-y)}{3} \text{ và } y = \frac{1-x}{3}.$$

Giải ra ta được : $x = \dfrac{4}{7}$ và $y = \dfrac{1}{7}$.

Từ đó ta có

$$\overrightarrow{CM} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{CA'} \Rightarrow \frac{4}{7}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{MA'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{MA'}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{7}AA' \ ;$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{7}\overrightarrow{CB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{CB'} \Rightarrow \frac{1}{7}\overrightarrow{MB} + \frac{6}{7}\overrightarrow{MB'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -6\overrightarrow{MB'}$$

$$\Rightarrow MB' = \frac{1}{7}BB'.$$

Tương tự, với $MB' = \dfrac{1}{7}BB'$ ta cũng có $NA' = \dfrac{1}{7}AA'$.

Vì $AM = \dfrac{3}{7}AA'$ nên $MN = \dfrac{3}{7}AA'$.

Tóm lại, ta có $AM = MN = 3NA'$.

Tương tự : $BP = PM = 3MB'$ và $CN = NP = 3PC'$.

b) Gọi S là diện tích tam giác ABC. Từ giả thiết ta suy ra $AB' = \dfrac{1}{3}AC$, $CA' = \dfrac{1}{3}CB$, $BC' = \dfrac{1}{3}BA$.

Vậy ta có : $S_{ABB'} = S_{BCC'} = S_{CAA'} = \dfrac{1}{3}S$.

Trong tam giác ABB', ta có $MB' = \dfrac{1}{7}BB'$ nên $S_{AB'M} = \dfrac{1}{7}S_{ABB'} = \dfrac{1}{21}S$.

Tương tự : $S_{AB'M} = S_{BC'P} = S_{CA'N} = \dfrac{1}{21}S$.

Từ đó suy ra

$$S_{MNP} = S_{ABC} - S_{ABB'} - S_{BCC'} - S_{CAA'} + S_{AB'M} + S_{BC'P} + S_{CA'N}$$

$$= S - 3.\frac{S}{3} + 3.\frac{1}{21}S = \frac{1}{7}S.$$

Vậy $S_{ABC} = 7S_{MNP}$.

32. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$$

$$= t\vec{u} + t\vec{v} + t\vec{w} = t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).$$

Đặt $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ thì vectơ $\vec{\alpha}$ cố định và $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{\alpha}$.

Suy ra nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G, còn nếu $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{\alpha}$.

33. a) • $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trọng tâm tam giác ABC.

• $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PD} = \vec{0}$ (D là trung điểm của cạnh BC). Vậy P là trung điểm của trung tuyến AD.

• $\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + 2\left(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{QE} + 4\overrightarrow{QD} = \vec{0}$

(E là trung điểm của AB, D là trung điểm của BC) $\Leftrightarrow \overrightarrow{QE} + 2\left(\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{ED}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$.

• $\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{RC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BA}$.

• $5\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{SA} - 2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) *Hướng dẫn :* Xuất phát từ câu a), hãy viết mỗi vectơ thành hiệu hai vectơ có điểm đầu là O.

34. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ không cùng phương nên ta có các số α và β sao cho $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, hay là $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \alpha\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) + \beta\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$.

Vậy : $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}$.

Đặt $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ thì $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.

Nếu M trùng G thì ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Vậy $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

35. Với mọi điểm O ta có :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} + 2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OM}.$$

Ta chọn điểm O sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

(Chú ý rằng nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}$ $= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$. Bởi vậy để $\vec{v} = \vec{0}$, ta chọn điểm O sao cho $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$). Khi đó $\vec{u} = -4\overrightarrow{OM}$ và do đó $|\vec{u}| = 4OM$. Độ dài vectơ $\vec{u}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $4OM$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuông góc của O trên d.

36. (h. 18) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có :

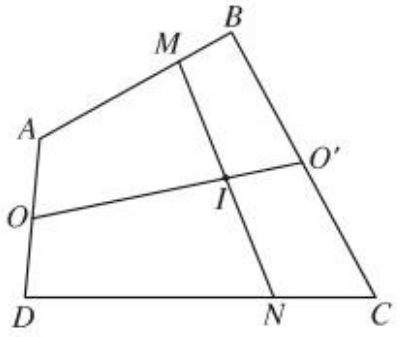
$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right).$$

Vì O và I là trung điểm của AD và MN nên :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN}\right)$$

$$= \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) = k\overrightarrow{OO'}.$$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp các điểm I là đường thẳng OO'.



Hình 18

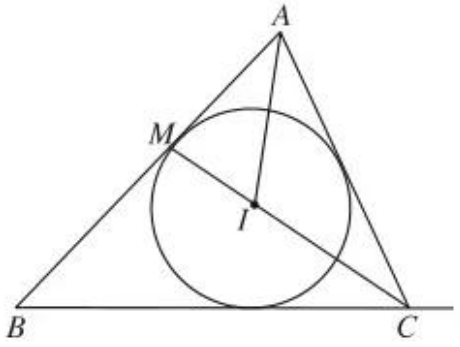
37. (h. 19)

a) Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$\frac{AM}{BM} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$, suy ra $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{MB}$.

Từ đó ta có $\overrightarrow{CM} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1 + \frac{b}{a}}$

$$= \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}.$$



Hình 19

b) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM. Bởi vậy theo câu a), ta có thể biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{AC}{AC + AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC + AM}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{b + \frac{bc}{a+b}} \cdot \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{bc}{a+b}}{b + \frac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}\right) + \frac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\right).$$

Suy ra :

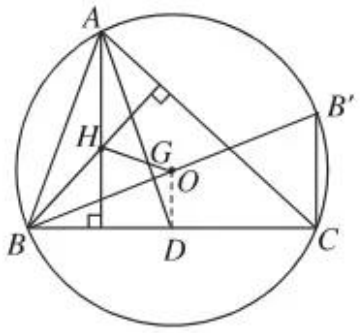
$$\left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

38. (h. 20)

a) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua O, ta có $B'C \perp BC$. Vì H là trực tâm tam giác ABC nên $AH \perp BC$. Vậy $AH \,//\, B'C$.

Chứng minh tương tự ta có $CH \,//\, B'A$.

Vậy $AB'CH$ là hình bình hành. Suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$. Gọi D là trung điểm của BC thì OD là đường trung bình của tam giác $BB'C$ nên $\overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OD}$. Vậy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$.



Hình 20

Từ đó, ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH} - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Suy ra : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì :

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} = 3\overrightarrow{HO} + 3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Kết hợp với kết quả của câu a), ta có :

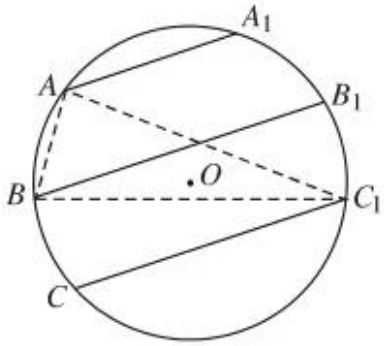
$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO}.$$

39. (h. 21) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1. Theo kết quả bài 38, ta có :

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1};$$

$$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1};$$

$$\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1}.$$



Hình 21

Suy ra :

$$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AA_1},$$
$$\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1}$$
$$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_1}.$$

Vì các dây cung AA_1, BB_1, CC_1 song song với nhau nên ba vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ có cùng phương. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{H_1H_2}$ và $\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay ba điểm H_1, H_2, H_3 thẳng hàng.

40. a) Ta lấy một điểm O nào đó thì :

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow k_1\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}\right) + k_2\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}\right) + ... + k_n\left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\left(k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}\right).$$

Vậy điểm G hoàn toàn xác định và duy nhất.

b) Suy từ câu a).

41. Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác Δ và D, E, F là ba đỉnh của tam giác Δ'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác Δ và Δ' thì với điểm I tuỳ ý, ta có :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = 3\left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'}\right).$$

Bởi vậy nếu chọn I là trọng tâm của hệ điểm A, B, C, D, E, F, tức là trọng tâm của hệ sáu điểm đã cho, thì I là điểm cố định và $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IG'} = \vec{0}$. Vậy các đường thẳng GG' luôn đi qua điểm I cố định (I là trung điểm của đoạn thẳng GG').

42. Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác Δ và DE là đoạn thẳng θ. Gọi G là trọng tâm tam giác Δ và M là trung điểm của DE thì với điểm I tuỳ ý, ta có :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = 3\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IM}.$$

Bởi vậy nếu chọn I là trọng tâm của hệ điểm A, B, C, D, E, tức là trọng tâm của hệ năm điểm đã cho thì I là điểm cố định và $3\overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IM} = \vec{0}$. Vậy các đường thẳng GM luôn luôn đi qua điểm I cố định (và I là điểm chia đoạn thẳng GM theo tỉ số $-\frac{2}{3}$).