§4. Tích của một vectơ với một số

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa tích của vectơ với một số và các tính chất.

2. Tính chất của trung điểm :

– Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

– Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm O ta có

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

3. Tính chất của trọng tâm tam giác :

– Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

– Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm O ta có

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

4. Điều kiện để hai vectơ cùng phương : Điều kiện cần và đủ để vectơ $\vec{b}$ *cùng phương với vectơ* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *là có một số k sao cho* $\vec{b} = k\vec{a}$.

Điều kiện để ba điểm thẳng hàng : Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$ *cùng phương.*

5. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương :

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. *Khi đó với vectơ* $\vec{x}$ *bất kì, luôn có cặp số duy nhất m và n sao cho* $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

II – ĐỀ BÀI

11. Cho ba điểm O, M, N và số k. Lấy các điểm M' và N' sao cho

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}.$$

Chứng minh rằng $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

12. Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có cặp số m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

Hãy phát biểu điều kiện cần và đủ để hai vectơ không cùng phương.

13. Cho ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ có độ dài bằng nhau và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Tính các góc AOB, BOC, COA.

14. Chứng minh rằng với ba vectơ tuỳ ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, luôn luôn có ba số α, β, γ không đồng thời bằng 0 sao cho $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

15. Cho ba điểm phân biệt A, B, C.

a) Chứng minh rằng nếu có một điểm I và một số t nào đó sao cho $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$ thì với mọi điểm I', ta có

$$\overrightarrow{I'A} = t\overrightarrow{I'B} + (1-t)\overrightarrow{I'C}.$$

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{IA} = t\overrightarrow{IB} + (1-t)\overrightarrow{IC}$ là điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

16. Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

a) Xét vị trí của điểm M đối với hai điểm A, B trong các trường hợp :

$$k \leq 0 \,;\, 0 < k < 1 \,;\, k > 1 \,;\, k = -1.$$

b) Nếu M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq 1$ và $k \neq 0$) thì M chia đoạn thẳng BA theo tỉ số nào ?

c) Nếu M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq 1$ và $k \neq 0$) thì A chia đoạn thẳng MB theo tỉ số nào ? B chia đoạn thẳng MA theo tỉ số nào ?

d) Chứng minh rằng : Nếu điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ thì với điểm O bất kì, ta luôn có

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}.$$

17. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo cùng tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

18. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ.

Chứng minh rằng $IJ \parallel AE$ và $IJ = \frac{1}{4}AE$.

19. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt chia các đoạn thẳng AB, BC, CA theo các tỉ số lần lượt là m, n, p (đều khác 1). Chứng minh rằng

a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (*Định lí Mê-nê-la-uýt*) ;

b) AN, CM, BP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (*Định lí Xê-va*).

20. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) Nếu ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì ba điểm A_2, B_2, C_2 cũng thế ;

b) Nếu ba đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy hoặc song song thì ba đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 cũng thế.

21. Cho tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua I, lần lượt cắt hai đường thẳng CA và CB tại A' và B'. Chứng minh rằng giao điểm M của AB' và $A'B$ nằm trên một đường thẳng cố định.

22. Cho điểm O nằm trong hình bình hành $ABCD$. Các đường thẳng đi qua O và song song với các cạnh của hình bình hành lần lượt cắt AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q. Gọi E là giao điểm của BQ và DM, F là giao điểm của BP và DN. Tìm điều kiện để E, F, O thẳng hàng.

23. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EA. Chứng minh rằng hai tam giác MPE và NQR có cùng trọng tâm.

24. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$;

b) Hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm.

25. Cho hai điểm phân biệt A, B.

a) Hãy xác định các điểm P, Q, R, biết :

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \ ; \quad -2\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = \vec{0} \ ; \quad \overrightarrow{RA} - 3\overrightarrow{RB} = \vec{0}.$$

b) Với điểm O bất kì và với ba điểm P, Q, R ở câu a), chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} \ ; \quad \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \ ; \quad \overrightarrow{OR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}.$$

26. Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\,\overrightarrow{OB}$.

Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB ?

27. Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

28. Cho tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Lấy các điểm A' và B' sao cho $\overrightarrow{CA'} = m\vec{a}$; $\overrightarrow{CB'} = n\vec{b}$. Gọi I là giao điểm của $A'B$ và $B'A$. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{CI}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

29. Cho tam giác ABC và trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E và F. Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho $FG // AC$. Chứng minh rằng hai tam giác ADE và BFG có diện tích bằng nhau.

30. Cho hình thang $ABCD$ với các cạnh đáy là AB và CD (các cạnh bên không song song). Chứng minh rằng nếu cho trước một điểm M nằm giữa hai điểm A, D thì có một điểm N nằm trên cạnh BC sao cho $AN // MC$ và $DN // MB$.

31. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm A', B', C' sao cho

$$\overrightarrow{A'B} = -2\overrightarrow{A'C}\ ;\ \overrightarrow{B'C} = -2\overrightarrow{B'A}\ ;\ \overrightarrow{C'A} = -2\overrightarrow{C'B}.$$

Đoạn thẳng AA' cắt các đoạn BB' và CC' lần lượt tại M và N, hai đoạn BB' và CC' cắt nhau tại P.

a) So sánh các đoạn thẳng AM, MN, NA'.

b) So sánh diện tích hai tam giác ABC và MNP.

32. Cho tam giác ABC và ba vectơ cố định $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Với mỗi số thực t, ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = t\vec{v}, \overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ khi t thay đổi.

33. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định các điểm G, P, Q, R, S sao cho :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = \vec{0}$; $5\overrightarrow{SA} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kì và với các điểm G, P, Q, R, S ở câu a), chứng minh rằng :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{OS} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

34. Cho tam giác ABC và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta luôn luôn tìm được ba số α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$ và $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$. Nếu điểm M trùng với trọng tâm tam giác ABC thì các số α, β, γ bằng bao nhiêu ?

35. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

36. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tuỳ ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

37. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

a) Gọi CM là đường phân giác trong của góc C. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{CM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

38. Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

39. Cho ba dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của đường tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của ba tam giác ABC_1, BCA_1 và CAB_1 nằm trên một đường thẳng.

40. Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số $k_1, k_2, ..., k_n$ mà $k_1 + k_2 + ... + k_n = k \neq 0$.

a) Chứng minh rằng có duy nhất một điểm G sao cho

$$k_1\overrightarrow{GA_1} + k_2\overrightarrow{GA_2} + ... + k_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Điểm G như thế gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm* A_i, *gắn với các hệ số* k_i. Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau (và do đó có thể xem các k_i đều bằng 1), thì G *gọi là trọng tâm của hệ điểm* A_i.

b) Chứng minh rằng nếu G là tâm tỉ cự nói ở câu a) thì với mọi điểm O bất kì, ta có

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\left(k_1\overrightarrow{OA_1} + k_2\overrightarrow{OA_2} + ... + k_n\overrightarrow{OA_n}\right).$$

41. Cho sáu điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong sáu điểm đó và Δ' là tam giác có ba đỉnh là ba điểm còn lại. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau, các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' luôn đi qua một điểm cố định.

42. Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng θ. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau, đường thẳng đi qua trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng θ luôn đi qua một điểm cố định.