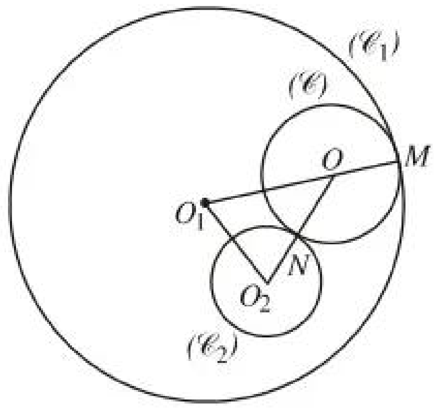
§ . Đường elip

59. (h. 109) Xét đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm O, tiếp xúc trong với ($\mathscr{C}_1$) tại M, tiếp xúc ngoài với ($\mathscr{C}_2$) tại N. Ta có :

$$OO_1 + OO_2 = O_1M - OM + O_2N + ON$$
$$= R_1 + R_2 \text{ không đổi.}$$

Tập hợp các tâm O là elip có các tiêu điểm là O_1, O_2 và độ dài trục lớn $2a = R_1 + R_2$.

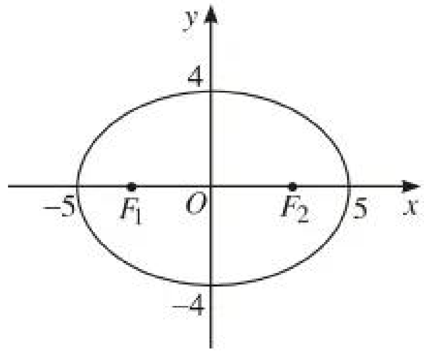


Hình 109

60. a) O là tâm đối xứng, $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$;
$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$; $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}\cdot$ Độ dài trục lớn : $2a = 10$, độ dài trục bé : $2b = 8$. Tiêu cự : $2c = 6$.

Các tiêu điểm : $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$. Các đỉnh : $(\pm 5 ; 0)$, $(0 ; \pm 4)$.
Elip được vẽ như hình 110.



Hình 110

b) Viết lại phương trình của elip : $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$. Elip có tâm đối xứng O.

$a^2=1 \Rightarrow a=1$, $b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$, $c^2=a^2-b^2=\frac{3}{4} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, tâm sai $e=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

Độ dài trục lớn : $2a = 2$, độ dài trục nhỏ : $2b = 1$, tiêu cự : $2c=\sqrt{3}$.

Các tiêu điểm : $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;0\right)$. Các đỉnh : $(\pm 1\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ \pm\frac{1}{2})\cdot$

Các câu c), d), e), f) : học sinh tự làm.

61. Elip (E) có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$.

a) $A(0\ ;\ -2)$ là một đỉnh $\Rightarrow b = 2$; $F(1\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 1$.

$a^2 = b^2 + c^2 = 5$. Phương trình của (E) là : $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

b) $F_1(-7\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow$ tiêu điểm thứ hai là : $F_2(7\ ;\ 0)$.

$M \in (E) \Rightarrow 2a = MF_1 + MF_2 = \sqrt{(-7+2)^2+12^2}+\sqrt{(7+2)^2+12^2}=28$
$\Rightarrow a = 14$.

$F(-7\ ;\ 0)$ là tiêu điểm $\Rightarrow c = 7 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 196 - 49 = 147$.

Phương trình của (E) là : $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{147}=1$.

c) $2c = 6 \Rightarrow c = 3$; $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow a = 5$, $b^2 = a^2 - c^2 = 16$.

Phương trình của (E) là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

d) $a = 4$, $b = 3 \Rightarrow$ phương trình của (E) là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

e) $M, N \in (E) \Rightarrow \begin{cases}\frac{16}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\\ \frac{8}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=20\\ b^2=15.\end{cases}$

Phương trình của (E) là $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$.

62. a) $m = a + c$, $n = a - c \Rightarrow \dfrac{m-n}{m+n} = \dfrac{(a+c)-(a-c)}{a+c+a-c} = \dfrac{2c}{2a} = e.$

b) $2a = 768806 \Rightarrow a = 384403$; $2b = 767746 \Rightarrow b = 383873$;

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 20179.$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ tâm Trái Đất tới tâm Mặt Trăng là :

$a + c \approx 404582$ (km) và khoảng cách bé nhất là : $a - c \approx 364224$ (km).

63. $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$; $c^2 = a^2 - b^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}.$

Elip (E) có các tiêu điểm : $F_1(-2\sqrt{2}\,;0), F_2(2\sqrt{2}\,;0).$

a) Gọi $M(x\,;\,y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó :

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

$$M \in (E) \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} = 1 - \frac{9}{9.8} = \frac{7}{8} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

Có hai điểm cần tìm là $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\ ;\ \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right).$

b) Gọi $N(x\,;\,y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó : $\overrightarrow{F_1N} = \left(x + 2\sqrt{2}\,;\,y\right),$
$\overrightarrow{F_2N} = (x - 2\sqrt{2}\,;\,y).$

$$\overrightarrow{F_1N} \perp \overrightarrow{F_2N} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1N}\,.\,\overrightarrow{F_2N} = 0 \Leftrightarrow \left(x + 2\sqrt{2}\right)\left(x - 2\sqrt{2}\right) + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8 + y^2 = 0. \qquad (1)$$

$$N \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Giải (1) và (2) ta được $x^2 = \dfrac{63}{8}$ và $y^2 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ và $y = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

Có bốn điểm cần tìm là $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\ ;\ \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$

c) Gọi $P(x\,;\,y) \in (E)$ là điểm cần tìm. Ta có :

$$F_1F_2^2 = F_1P^2 + F_2P^2 - 2F_1P.\,F_2P.\cos 60^\circ = (F_1P + F_2P)^2 - 2F_1P.F_2P - 2F_1P.F_2P.\frac{1}{2}$$

$$= 4a^2 - 3F_1P.F_2P = 4a^2 - 3(a + ex)(a - ex) = 4a^2 - 3(a^2 - e^2x^2) = a^2 + 3e^2x^2.$$

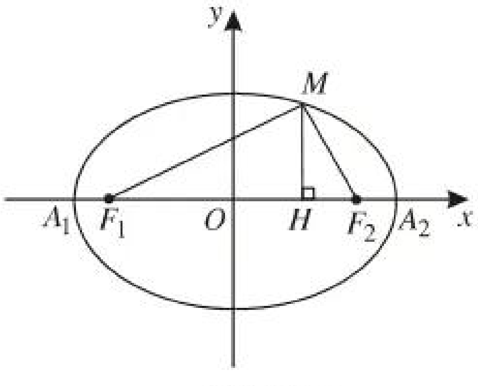
Như vậy $4c^2 = a^2 + 3.\dfrac{c^2}{a^2}x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{(4c^2 - a^2).a^2}{3c^2} = \dfrac{(4.8-9).9}{3.8} = \dfrac{69}{8}$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}.$$

$P \in (E) \Rightarrow y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{9} = 1 - \dfrac{23}{24} = \dfrac{1}{24} \Rightarrow y = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}.$

Có bốn điểm cần tìm với toạ độ là $\left(\pm\dfrac{\sqrt{69}}{2\sqrt{2}}; \pm\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right)$.

64. (h. 111)



Hình 111

$M(x\,;\,y) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

$MF_1 = a + ex,\ MF_2 = a - ex.$

a) $MF_1.MF_2 + OM^2 =$

$$= (a + ex)(a - ex) + x^2 + y^2$$

$$= a^2 - e^2x^2 + x^2 + y^2$$

$$= a^2 + y^2 + x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$= a^2 + y^2 + b^2 \cdot \frac{x^2}{a^2} = a^2 + y^2 + b^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2.$$

b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4e^2x^2.$ (1)

$$4(OM^2 - b^2) = 4(x^2 + y^2 - b^2) = 4.\left[x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) - b^2\right]$$

$$= 4x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 4e^2x^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$.

c) $HM^2 = y^2$.

$$-\frac{b^2}{a^2}\overline{HA_1}.\overline{HA_2} = -\frac{b^2}{a^2}(-a-x)(a-x) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$= b^2 - (b^2 - y^2) = y^2 \Rightarrow HM^2 = -\frac{b^2}{a^2}\overline{HA_1}.\overline{HA_2}.$$

65. a) $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$,

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$,

$c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$.

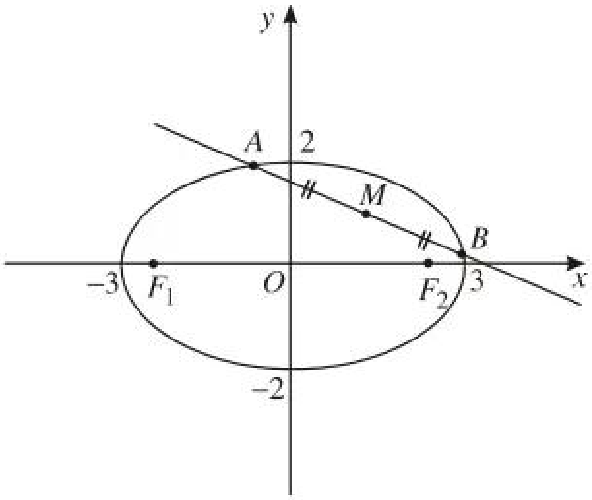
Các tiêu điểm :

$F_1(-\sqrt{5}\,; 0)$, $F_2(\sqrt{5}\,; 0)$.

Các đỉnh : $(\pm 3\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ \pm 2)$.

Tâm sai : $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Elip được vẽ như hình 112.



Hình 112

b) Hoành độ giao điểm của d và (E) là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(x+m)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 13x^2 + 18mx + 9m^2 - 36 = 0. \ (1)$$

d và (E) có điểm chung khi và chỉ khi (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow 81m^2 - 13(9m^2 - 36) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 13 \Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}$.

Vậy với $-\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}$ thì d và (E) có điểm chung.

c) (h. 112) Đường thẳng Δ đi qua M, với vectơ chỉ phương $\vec{u}(a\,; b)$ có dạng :

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 + bt \end{cases} \ (a^2 + b^2 \neq 0).$$

$$A, B \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} x_A = 1 + at_1 \\ y_A = 1 + bt_1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_B = 1 + at_2 \\ y_B = 1 + bt_2. \end{cases}$$

M là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1 + t_2) = 0 \\ b(t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad (1) \qquad (\text{do } a^2 + b^2 \neq 0).$$

$A, B \in (E)$ suy ra t_1, t_2 là nghiệm của phương trình :

$4(at + 1)^2 + 9(bt + 1)^2 = 36 \Leftrightarrow (4a^2 + 9b^2)t^2 + (8a + 18b)t - 23 = 0.$

$t_1 + t_2 = 0 \Rightarrow 8a + 18b = 0 \Leftrightarrow 4a + 9b = 0.$

Chọn $a = 9$, $b = -4$, ta được phương trình của Δ là :

$$\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \text{ hay } 4x + 9y - 13 = 0.$$

Chú ý. Có thể giải bài toán này bằng cách viết phương trình của Δ dưới dạng $y = k(x-1) + 1$ hoặc $x = 1$, nhưng việc tính toán sẽ phức tạp hơn.

66. a) $M(x_0\,;\,y_0) \in E \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \;(a > b > 0)\;;\; OM^2 = x_0^2 + y_0^2.$

Ta có : $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{a^2} \le \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \le a^2 \Leftrightarrow OM^2 \le \text{a}^2 \Leftrightarrow OM \le \text{a}.$

$\dfrac{x_0^2}{b^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} \ge \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \ge b^2 \Leftrightarrow OM^2 \ge b^2 \Leftrightarrow OM \ge b.$

Vậy $b \le OM \le a$. Ta có $a = OM$ khi và chỉ khi $y_0 = 0$, tức là M trùng với các đỉnh trên trục lớn.

Ta có $b = OM$ khi và chỉ khi $x_0 = 0$, tức là M trùng với các đỉnh trên trục bé.

b) Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_A^2 = \frac{a^2b^2\beta^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}, \quad y_A^2 = \frac{a^2b^2\alpha^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}.$$

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{a^2b^2\beta^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} + \frac{a^2b^2\alpha^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} = \frac{a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}.$$

$$\Rightarrow OA = \frac{ab.\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}}.$$

c) Do OA vuông góc với OB nên phương trình đường thẳng OB là : $\beta x - \alpha y = 0$. B là giao điểm của (E) với đường thẳng $\beta x + (-\alpha)y = 0$ nên áp dụng câu b), ta có

$$OB^2 = \frac{a^2b^2\left[\beta^2 + (-\alpha)^2\right]}{a^2\beta^2 + b^2(-\alpha)^2} = \frac{a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

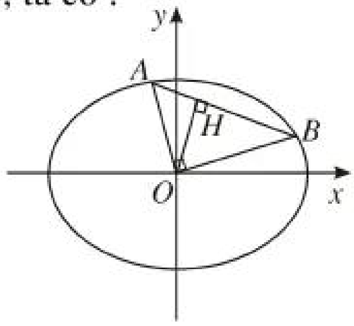
Do đó : $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ không đổi.

d) (h. 113) Kẻ $OH \perp AB$. Trong tam giác vuông AOB, ta có :

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vậy đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O, bán kính $R=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Hình 113

67. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có : trục Ox đi qua A, B ; trục Oy là đường trung trực của AB. Đặt $AB = 2a$, $AD = 2b$. Hãy tìm toạ độ của I_k và chứng minh I_k nằm trên elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

68. a) $\overrightarrow{HM'}=k\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}-x_H=k(x_M-x_H) \\ y_{M'}-y_H=k(y_M-y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'}=x_M \\ y_{M'}=ky_M. \end{cases}$

(Chú ý rằng trong trường hợp này thì $x_H = x_M = x_{M'}$, $y_H = 0$).

b) Tương tự câu a) với chú ý rằng trong phép co về trục Oy thì $x_H = 0$, $y_H = y_M = y_{M'}$.

69. • $M(x\ ;\ y) \in (\mathscr{C}) \Rightarrow x^2+y^2=a^2$. Ảnh M' của M qua phép co về trục Ox theo hệ số $\dfrac{b}{a}<1$ là $\begin{cases} x_{M'}=x \\ y_{M'}=\dfrac{b}{a}y \end{cases} \Rightarrow a^2=x^2+y^2=x_{M'}^2+\dfrac{a^2}{b^2}y_{M'}^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{M'}^2}{a^2}+\frac{y_{M'}^2}{b^2}=1.$$

Vậy ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép co về trục Ox theo hệ số $\dfrac{b}{a}<1$ là elip (E) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

• Phần ngược lại chứng minh tương tự.

70. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; b) $\frac{x^2}{36}+y^2=1$; c) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

71. a) $x^2+y^2=25$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{18}=1$; c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$.