§5. Đường elip

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và số $2a$ $(a > c)$.
Elip (E) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$.

$$(E) = \{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}.$$

F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của (E).

2. Phương trình chính tắc của elip : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ (*h.* 83).

$a^2 = b^2 + c^2$; O là tâm đối xứng ; Ox, Oy là các trục đối xứng.

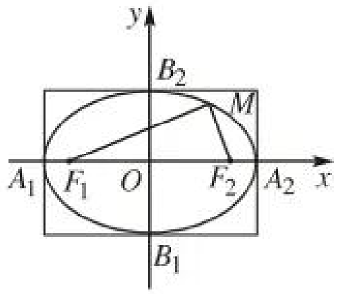
Trục lớn $A_1A_2 = 2a$ *nằm trên Ox ;*

Trục bé $B_1B_2 = 2b$ *nằm trên Oy;*

Các đỉnh : $A_1(-a\,;0), A_2(a\,;0), B_1(0\,;-b), B_2(0\,;b)$;

Hai tiêu điểm : $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$;

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$;



Hình 83

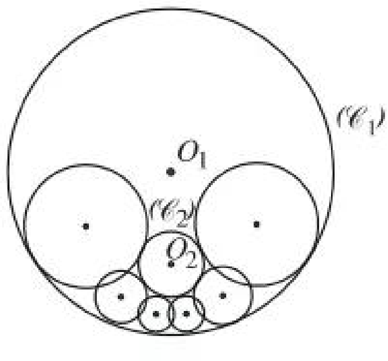
Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a, y = \pm b$;

Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M\,;y_M) \in (E)$:

$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M \;;\; MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M.$$

II – ĐỀ BÀI

59. Cho đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ tâm O_1, bán kính R_1 và đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ tâm O_2, bán kính R_2. Biết đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ nằm trong đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và tâm của hai đường tròn không trùng nhau (h. 84). Tìm tập hợp tâm của các đường tròn tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C}_2)$ và tiếp xúc trong với $(\mathscr{C}_1)$.



Hình 84

60. Xác định tâm đối xứng, độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm và các đỉnh của mỗi elip sau :

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

b) $x^2 + 4y^2 = 1$;

c) $4x^2 + 5y^2 = 20$;

d) $4x^2 + 16y^2 - 1 = 0$;

e) $x^2 + 3y^2 = 2$;

f) $mx^2 + ny^2 = 1$ $(n > m > 0, m \neq n)$.

Vẽ elip có phương trình ở câu a).

61. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết

a) $A(0\ ;\ -2)$ là một đỉnh và $F(1\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm của (E) ;

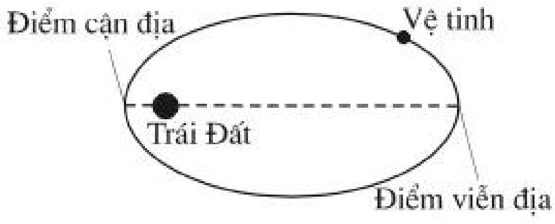
b) $F_1(-7\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm và (E) đi qua $M(-2\ ;\ 12)$;

c) Tiêu cự bằng 6, tâm sai bằng $\frac{3}{5}$;

d) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm 4$, $y = \pm 3$.

e) (E) đi qua hai điểm $M(4\ ;\ \sqrt{3})$ và $N(2\sqrt{2}\ ;\ -3)$.

62. Mặt Trăng và các vệ tinh của Trái Đất chuyển động theo quỹ đạo là các đường elip mà tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Điểm gần Trái Đất nhất trên quỹ đạo gọi là *điểm cận địa*, điểm xa Trái Đất nhất trên quỹ đạo gọi là *điểm viễn địa* (h. 85).



Hình 85

a) Biết khoảng cách từ điểm viễn địa và điểm cận địa trên quỹ đạo của một vệ tinh đến tâm Trái Đất thứ tự là m và n. Chứng minh rằng tâm sai của quỹ đạo này bằng $\frac{m-n}{m+n}$.

b) Biết độ dài trục lớn và độ dài trục bé của quỹ đạo Mặt Trăng là 768806km và 767746km. Tính khoảng cách lớn nhất và khoảng cách bé nhất giữa tâm Trái Đất và tâm của Mặt Trăng.

63. Tìm những điểm trên elip (E) : $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ thoả mãn

a) Có bán kính qua tiêu điểm trái bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm phải.

b) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

c) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 60°.

64. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tuỳ ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng

a) $MF_1 . MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$;

b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$;

c) $HM^2 = -\dfrac{b^2}{a^2}.\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$.

65. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh ; tính tâm sai và vẽ elip (E).

b) Xác định m để đường thẳng $d : y = x + m$ và (E) có điểm chung.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(1 ; 1)$ và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

66. Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad (a > b > 0)$.

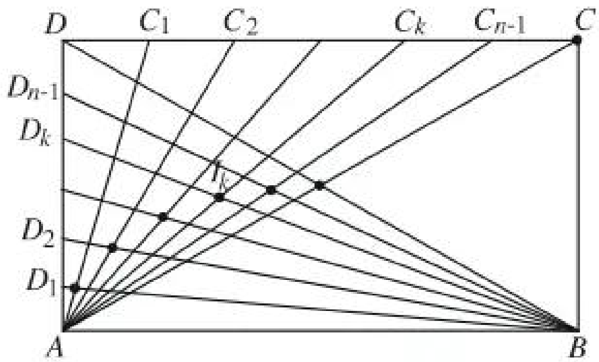
a) Chứng minh rằng với mọi M thuộc (E), ta luôn có $b \le OM \le a$.

b) Gọi A là giao điểm của đường thẳng có phương trình $\alpha x + \beta y = 0$ với (E). Tính OA theo a, b, α, β.

c) Gọi B là điểm trên (E) sao cho $OA \perp OB$. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ có giá trị không đổi.

d) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

67. Trên hình 86, cạnh DC của hình chữ nhật $ABCD$ được chia thành n đoạn thẳng bằng nhau bởi các điểm chia $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$; cạnh AD cũng được chia thành n đoạn thẳng bằng nhau bởi các điểm chia $D_1, D_2, ..., D_{n-1}$. Gọi I_k là giao điểm của đoạn thẳng AC_k với đoạn thẳng BD_k. Chứng minh rằng các điểm I_k $(k = 1, 2, ..., n - 1)$ nằm trên elip có trục lớn là cạnh AB, độ dài trục bé bằng chiều rộng AD của hình chữ nhật $ABCD$.



Hình 86

68. Phép co về trục Δ theo hệ số k $(k \neq 0)$ là phép cho tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, trong đó H là hình chiếu (vuông góc) của M trên Δ. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép co đó. Chứng minh rằng

a) Phép co về trục Ox theo hệ số k biến điểm M thành điểm M' sao cho $\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = ky_M \end{cases}$;

b) Phép co về trục Oy theo hệ số k biến điểm M thành điểm M' sao cho $\begin{cases} x_{M'} = kx_M \\ y_{M'} = y_M. \end{cases}$

69. Chứng minh rằng phép co về trục Ox theo hệ số $\frac{b}{a} < 1$, biến đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 = a^2$ thành elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và ngược lại, phép co về trục Ox theo hệ số $\frac{a}{b} > 1$ biến elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thành đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 = a^2$.

70. Tìm ảnh của đường tròn $(\mathscr{C})$ qua phép co về trục Ox theo hệ số k trong mỗi trường hợp sau

a) $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 = 9$, $k = \frac{2}{3}$;

b) $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 - 36 = 0$, $k = \frac{1}{6}$;

c) $(\mathscr{C})$: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, $k = -1$.

71. Tìm ảnh của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ qua phép co về trục Ox theo hệ số k trong mỗi trường hợp sau :

a) $k = \frac{5}{3}$; b) $k = \sqrt{2}$; c) $k = \frac{1}{2}$.