§5. Trục toạ độ và hệ trục toạ độ

43. a) A, B, C có toạ độ lần lượt là 2 ; 4 ; –3.

b) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 4 - 2 = 2$, $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = -7$,

$\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} = 5$;

$\overline{AB} + \overline{CB} = \overline{AB} - \overline{BC} = 2 + 7 = 9$;

$\overline{BA} - \overline{BC} = -\overline{AB} - \overline{BC} = -2 + 7 = 5$ (hoặc $\overline{BA} - \overline{BC} = \overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA} = 5$) ;

$\overline{AB}.\overline{BA} = -\overline{AB}^2 = -4$.

44. $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overline{PM} = -\overline{PN} \Leftrightarrow 2\left(\overline{OM} - \overline{OP}\right) = -\left(\overline{ON} - \overline{OP}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OP} = \dfrac{1}{3}\left(2\overline{OM} + \overline{ON}\right) = \dfrac{1}{3}[2.(-5) + 3] = -\dfrac{7}{3}$.

Vậy điểm P có toạ độ là $-\dfrac{7}{3}$.

45. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right) = \dfrac{1}{3}(-4 - 5 + 3) = -2$.

Vậy M có toạ độ là – 2. Khi đó :

$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = -4 + 2 = -2$, $\overline{MB} = -3$, $\overline{MC} = 5$.

Suy ra $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{3}{5}$.

46. a) $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$

$\Leftrightarrow \left(\overline{OA} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OB} - \overline{OM}\right) = \left(\overline{OC} - \overline{OM}\right)\left(\overline{OD} - \overline{OM}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{OM}.\left(\overline{OD} + \overline{OC} - \overline{OA} - \overline{OB}\right) = \overline{OC}.\overline{OD} - \overline{OA}.\overline{OB}$

$\Leftrightarrow \overline{OM}.\left(d + c - a - b\right) = cd - ab. \qquad (*)$

Do $a + b \neq c + d$ nên $\overline{OM} = \dfrac{cd - ab}{d + c - a - b}$.

b) Giả sử AB và CD có cùng trung điểm I. Khi đó

$$\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\frac{\overline{OC}+\overline{OD}}{2}\quad\left(=\overline{OI}\right),$$

hay $a+b=c+d$. Khi đó $ab\neq cd$ (vì nếu $ab=cd$ và $a+b=c+d$ thì dễ dàng suy ra bốn điểm A, B, C, D không phân biệt). Vậy từ (*) ta suy ra điểm M không xác định.

Áp dụng : Với $a=-2,\ b=5,\ c=3,\ d=-1$, ta thấy $a+b\neq c+d$. Theo câu a), điểm M được xác định và ta có

$$\overline{OM}=\frac{cd-ab}{d+c-a-b}=\frac{3.(-1)-(-2).5}{-1+3+2-5}=-7.$$

Suy ra điểm M có toạ độ là -7.

47. a) $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=(2.1-3.(-3)+(-4)\,;2.2-3.1+(-2))=(7\,;-1)$.

$$\vec{v}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}=\left(0\,;-\frac{2}{3}\right).$$

$$\vec{w}=3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}=(-19\,;0).$$

Hai vectơ $\vec{v}$ và $\vec{j}$ cùng phương, hai vectơ $\vec{w}$ và $\vec{i}$ cùng phương.

b) $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}-3m-4n=1\\ m-2n=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{3}{5}\\ n=-\dfrac{7}{10}.\end{cases}$

48. a) Giả sử $D=(x\,;y)$. Khi đó

$\overrightarrow{AB}=(-1\,;-4)$, $\overrightarrow{AC}=(1\,;-2)$;

$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3.(-1)-2.1\\ y-5=3.(-4)-2.(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=-3.\end{cases}$

Vậy $D=(-3\,;-3)$.

b) Giả sử $E=(x\,;y)$. Từ $ABCE$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$, do đó

$\begin{cases}x-2=2\\ y-5=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=7\end{cases}$. Vậy $E=(4\,;7)$.

Tâm I của hình bình hành cũng là trung điểm của AC nên :

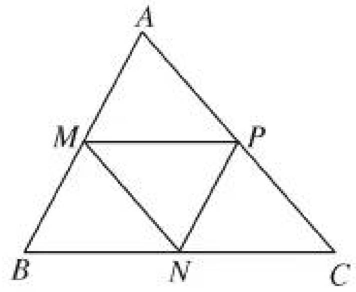
$$I = \left(\frac{2+3}{2}\,;\,\frac{5+3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\,;\,4\right).$$

49. (h. 22) Giả sử tam giác ABC nhận M, N, P là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NP}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = x_P - x_N \\ y_A - y_M = y_P - y_N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_1 + x_3 - x_2 \\ y_A = y_1 + y_3 - y_2. \end{cases}$$



Hình 22

Suy ra $A = (x_1 + x_3 - x_2\,;\,y_1 + y_3 - y_2)$.

Tương tự ta tính được :

$B = (x_1 + x_2 - x_3\,;\,y_1 + y_2 - y_3)$, $C = (x_2 + x_3 - x_1\,;\,y_2 + y_3 - y_1)$.

50. a) $\overrightarrow{AB} = (-5\,;\,10)$; $\overrightarrow{AC} = (3\,;\,6)$. Do $-\dfrac{5}{3} \neq \dfrac{10}{6}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C không thẳng hàng.

b) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là :

$$G = \left(\frac{0-5+3}{3}\,;\,\frac{-4+6+2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right).$$

51. $G(x_G\,;\,0) \in Ox$, $C(0\,;\,y_C) \in Oy \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{-1+5+0}{3} \\ 0 = \dfrac{1-3+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{4}{3} \\ y_C = 2. \end{cases}$

Vậy $G = \left(\dfrac{4}{3}\,;\,0\right)$, $C = (0\,;\,2)$.

52. $\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases} \quad (k \neq 1).$

Khi $k = -1$ thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$, M là trung điểm của AB.