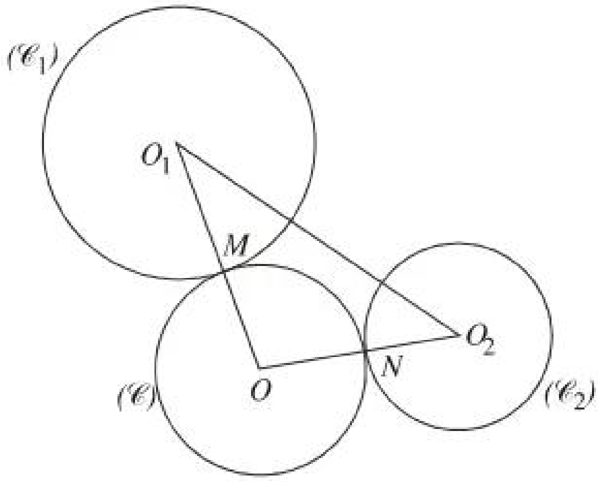
§6. Đường hypebol

72. (h. 114) Kí hiệu O_1, R_1 là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C}_1)$; O_2, R_2 là tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C}_2)$.

Xét đường tròn thay đổi $(\mathscr{C})$, tâm O, bán kính R. $(\mathscr{C})$ tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C}_1)$ tại M, với $(\mathscr{C}_2)$ tại N. Ta có :



Hình 114

$$\left|OO_1 - OO_2\right| = \left|(OM + O_1M) - (ON + O_2N)\right|$$
$$= \left|O_1M - O_2N\right| = \left|R_1 - R_2\right| > 0 \text{ (do } R_1 \neq R_2\text{)}.$$

Do đó O nằm trên một hypebol có các tiêu điểm là O_1 và O_2. Tâm đối xứng của hypebol này là trung điểm của O_1O_2. Lập luận tương tự cho trường hợp đường tròn $(\mathscr{C})$ cùng tiếp xúc trong với các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

73. a) $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$.

Độ dài trục thực : $2a = 8$.

Độ dài trục ảo : $2b = 4$.

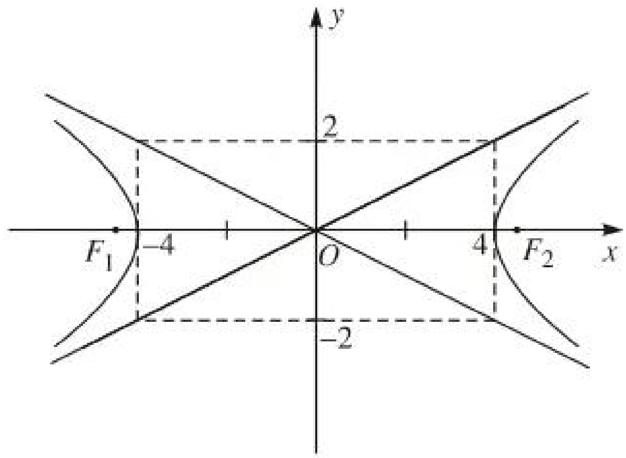
Tiêu cự : $2c = 4\sqrt{5}$; tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Các tiêu điểm : $F_1 = (-2\sqrt{5}\ ;\ 0)$, $F_2 = (2\sqrt{5}\ ;0)$.

Các đỉnh : $A_1 = (-4\ ;\ 0), A_2 = (4\ ;\ 0)$.

Các tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm\dfrac{1}{2}x$.

Hypebol được vẽ như hình 115.



Hình 115

f) Viết lại phương trình hypebol : $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{m}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{1}{n}} = 1$.

$$a^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{m}}\ ;\ b^2 = \frac{1}{n} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{m+n}{mn}}.$$

Độ dài trục thực : $2a = \dfrac{2}{\sqrt{m}}$, độ dài trục ảo : $2b = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Tiêu cự : $2c = 2\sqrt{\dfrac{m+n}{mn}}$.

Các tiêu điểm : $F_1 = \left(-\sqrt{\dfrac{m+n}{mn}}\ ;0\right)$; $F_2 = \left(\sqrt{\dfrac{m+n}{mn}}\ ;\ 0\right)$.

Các đỉnh : $A_1 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{m}}\ ;0\right)$, $A_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\ ;0\right)$. Các tiệm cận : $y = \pm\sqrt{\dfrac{m}{n}}.x$.

Các câu b), c), d), e) học sinh tự làm.

74. Hypebol (H) có phương trình chính tắc : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$.

a) $(5\ ;\ 0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 5$; $(-4\ ;\ 0)$ là một đỉnh $\Rightarrow a = 4$.

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Phương trình của ($H$) : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b) $2b = 12 \Rightarrow b = 6$; $e = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{25}{16} \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{a^2} = \dfrac{25}{16}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+36}{a^2} = \dfrac{25}{16} \Rightarrow a^2 = 64$. Phương trình của ($H$) : $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

c) $a = 2$; $e = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{c}{2} \Leftrightarrow c = 3$. Do đó $b^2 = c^2 - a^2 = 5$.

Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

d) $e = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{2} \Leftrightarrow c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2$ (1)

$A \in (H) \Rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a^2 = b^2 = 16$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.

e) $P \in (H), Q \in (H) \Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{64}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 32 \\ b^2 = 8. \end{cases}$

Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$.

75. (H) có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) $a = \frac{1}{2}, b = 1 \Rightarrow$ phương trình của (H) : $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1$.

b) $(3 ; 0)$ là một đỉnh của $(H) \Rightarrow a = 3$. Các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở với trục Ox là các tiêu điểm của (H). Vậy $c = 4$; $b^2 = c^2 - a^2 = 7$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

c) $c = 10$. Các tiệm cận có phương trình $y = \pm\frac{4}{3}x$, nên $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, suy ra $\frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{4^2 + 3^2}{3^2}$ hay $\frac{10^2}{a^2} = \frac{25}{9}$. Vậy $a^2 = 36, b^2 = 64$. Phương trình của (H) : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

d) Phương trình các đường tiệm cận là $y = \pm\frac{b}{a}x$. Do góc giữa hai đường tiệm cận là 60° và hai đường tiệm cận đối xứng với nhau qua Ox, nên có hai trường hợp :

– Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 30°, suy ra $\frac{b}{a} = \tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

– Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 60^o, suy ra $\frac{b}{a} = \tan 60^o = \sqrt{3}$. (2)

$$N \in (H) \Rightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $a^2 = 9, b^2 = 3$. Ta được hypebol $(H_1) : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$.

Từ (2) và (3) suy ra $a^2 = 33, b^2 = 99$. Ta được hypebol $(H_2) : \frac{x^2}{33} - \frac{y^2}{99} = 1$.

76. Xét điểm tuỳ ý $M(x ; y) \in (H)$. Ta có : $M \in (H) \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2m$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2}\right| = 2m$$

$$\Leftrightarrow (x+m)^2 + (y+m)^2 + (x-m)^2 + (y-m)^2$$

$$-2\sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2}.\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2m^2 + (2mx + 2my)}.\sqrt{x^2 + y^2 + 2m^2 - (2mx + 2my)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 = \left(x^2 + y^2 + 2m^2\right)^2 - (2mx + 2my)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{m^2}{2}\cdot$$

Chú ý rằng : Với $m = \sqrt{2}$ ta có hypebol $y = \frac{1}{x}\cdot$

77. (H) có hai tiệm cận là $\Delta_1 : \quad y = \frac{b}{a}x$ hay $bx - ay = 0$;

$$\Delta_2 : \quad y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } bx + ay = 0.$$

Xét $M(x ; y) \in (H)$ thì $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, hay $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Khi đó

$$d(M ; \Delta_1).d(M ; \Delta_2) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.\frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|b^2x^2 - a^2y^2\right|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

78. a) Xét $M(x ; y)$. Ta có :

$$MB = 2MH \Leftrightarrow MB^2 = 4MH^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1. \qquad (1)$$

Tập hợp các điểm M cần tìm là hypebol có phương trình (1).

b) Xét $N(x\,;\,y)$ thì $\overrightarrow{AN} = (x+1\,;\,y)$, $\overrightarrow{BN} = (x-1;\,y)$. Rõ ràng $x \neq -1$ và $x \neq 1$ (vì nếu không thì các đường thẳng AN hoặc BN không có hệ số góc), do đó các đường thẳng AN và BN lần lượt có hệ số góc $k_1 = \dfrac{y}{x+1}$, $k_2 = \dfrac{y}{x-1}$. Khi đó : $k_1.k_2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{y}{x+1}.\dfrac{y}{x-1} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{x^2-1} = 2 \Leftrightarrow$ $y^2 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ (2). Tập hợp các điểm N cần tìm là hypebol có phương trình (2) bỏ đi hai đỉnh : $(-1\,;\,0)$ và $(1;\,0)$.

79. Viết lại phương trình của (H) : $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$; $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{5}$.

(H) có các tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{5};\,0)$, $F_2(\sqrt{5};\,0)$.

a) Gọi $M(x\,;\,y)$ là điểm cần tìm. Ta có :

$$\overrightarrow{F_1M} = \left(x+\sqrt{5}\,;\,y\right),\ \overrightarrow{F_2M} = \left(x-\sqrt{5}\,;\,y\right).$$

$F_1M \perp F_2M \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0 \qquad (1)$$

$$M \in (H) \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 - 4 = 0 \qquad (2)$$

Giải hệ (1) và (2), ta được : $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $y = \pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là : $\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}\,;\,\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) Gọi $N(x\,;\,y)$ là điểm cần tìm. $N \in (H) \Rightarrow |NF_1 - NF_2| = 2a = 2$.

Trong tam giác F_1NF_2, ta có :

$$F_1F_2^{\,2} = F_1N^2 + F_2N^2 - 2.F_1N.F_2N.\cos\widehat{F_1NF_2}$$

$$= (F_1N - F_2N)^2 + 2F_1N.F_2N - 2F_1N.F_2N.\cos 120^{\circ}$$

$$= 4 + 3\,F_1N.F_2N = 4 + 3.|a+ex|.|a-ex| = 4 + 3|a^2 - e^2x^2|$$

$\Rightarrow 4c^2 = 4 + 3\left|1 - 5x^2\right| \Leftrightarrow 4.5 = 4 + 3\left|1 - 5x^2\right| \Leftrightarrow \left|1 - 5x^2\right| = \dfrac{16}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{19}{15} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{19}{15}}$. Thay $x = \pm\sqrt{\dfrac{19}{15}}$ vào phương trình của (H), ta tính được $y = \pm\dfrac{4}{\sqrt{15}}\cdot$ Vậy có bốn điểm cần tìm là : $\left(\pm\sqrt{\dfrac{19}{15}} ; \pm\dfrac{4}{\sqrt{15}}\right)$.

c) Do (H) nhận Ox, Oy là các trục đối xứng, nên ta chỉ cần xét những điểm $(x ; y)$ của (H) mà : x, y nguyên, $x \geq 0, y \geq 0$, rồi sau đó ta tìm những điểm đối xứng với những điểm này qua trục Ox và Oy.

Ta có : $4x^2 - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 4$ (1).

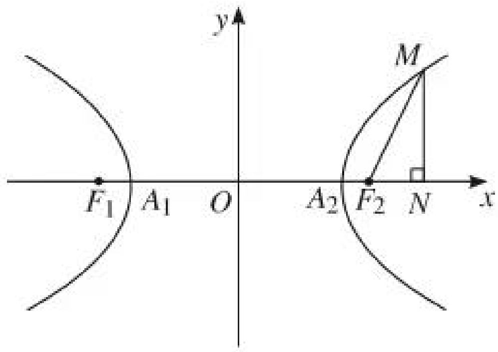
Do $2x - y$, $2x + y$ nguyên, $2x + y \geq 0$ và $2x + y \geq 2x - y$, nên từ (1) ta có các trường hợp :

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ (2), $\quad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ (3)

Hệ (2) không có nghiệm nguyên, hệ (3) có một nghiệm nguyên là : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy những điểm trên (H) có toạ độ nguyên là : $(1 ; 0)$, $(-1 ; 0)$.

80. (h. 116) $M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$



Hình 116

$MF_1 = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right|$, $MF_2 = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right|$.

a) $OM^2 - MF_1.MF_2 =$

$$= x^2 + y^2 - \left|a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2\right|$$

$$= x^2 + y^2 - \left|a^2 - c^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right)\right| = x^2 + y^2 - \left|-b^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2\right|$$

$$= x^2 + y^2 - b^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + y^2 - b^2 - \frac{a^2 + b^2}{b^2}y^2$$

$$= a^2 - b^2.$$

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + 4MF_1.MF_2 = 4a^2 + 4\left|a^2 - \dfrac{c^2}{a^2}x^2\right|$

$$= 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2. \qquad (1)$$

$4(OM^2 + b^2) = 4(x^2 + y^2 + b^2) = 4x^2 + 4y^2 + 4b^2$

$$= 4\left(a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right) + 4y^2 + 4b^2$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + 4y^2\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) = 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c) $NM^2 = y^2$.

$\dfrac{b^2}{a^2}.\overline{NA_1}.\overline{NA_2} = \dfrac{b^2}{a^2}(-x - a)(-x + a) = -\dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = -b^2 + \dfrac{b^2}{a^2}x^2$

$$= -b^2 + b^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) = y^2.$$

Vậy $NM^2 = \dfrac{b^2}{a^2}.\overline{NA_1}.\overline{NA_2}.$

81. a) $(H) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 4y^2 - 20 = 0.$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3.$

(H) có hai nhánh : nhánh trái ứng với $x \leq -2$, nhánh phải ứng với $x \geq 2$.

Hoành độ giao điểm của (H) và Δ là nghiệm của phương trình :

$$5x^2 - 4.(x + m)^2 - 20 = 0, \text{ hay } x^2 - 8mx - 4(m^2 + 5) = 0. \qquad (1)$$

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m. Do đó Δ luôn cắt (H) tại hai điểm M và N thuộc hai nhánh khác nhau.

Theo giả thiết $x_M < x_N$ nên M thuộc nhánh trái, N thuộc nhánh phải.

b) (H) có các tiêu điểm $F_1(-3 ; 0)$, $F_2(3 ; 0)$.

$F_2N = \left|a - \dfrac{c}{a}x_N\right| = \left|2 - \dfrac{3}{2}x_N\right| = \dfrac{3}{2}x_N - 2$ (do $x_N \geq 2$).

$F_1M = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| = \left|2 + \frac{3}{2}x_M\right| = -\frac{3}{2}x_M - 2$ (do $x_M \leq -2$).

$F_2N = 2F_1M \Leftrightarrow \frac{3}{2}x_N - 2 = 2\left(-\frac{3}{2}x_M - 2\right) \Leftrightarrow 3x_N + 6x_M + 4 = 0$ (2)

x_M, x_N là nghiệm của (1) nên : $\begin{cases} x_M + x_N = 8m & (3) \\ x_M.x_N = -4(m^2+5) & (4). \end{cases}$

Giải (2) và (3) ta được : $x_M = -\frac{4}{3} - 8m,\ x_N = \frac{4}{3} + 16m$. Thay x_M, x_N vào (4)

ta có : $\left(-\frac{4}{3} - 8m\right)\left(\frac{4}{3} + 16m\right) = -4(m^2+5) \Leftrightarrow 279m^2 + 72m - 41 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{1415}}{93}$. Vậy với $m = \frac{-12 \pm \sqrt{1415}}{93}$ thì $F_2N = 2F_1M$.

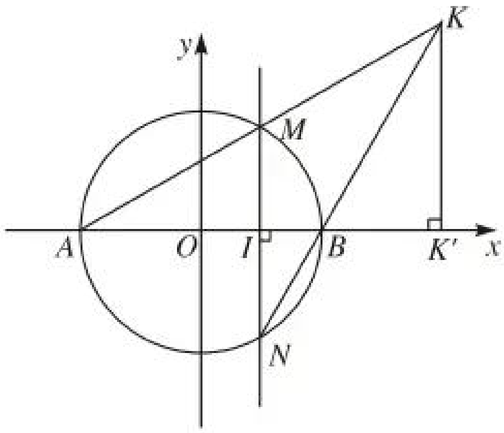
82. (h. 117) Giả sử $M = (x_0 ; y_0)$, suy ra $N = (x_0 ; -y_0)$. Do $-1 < m < 1, m \neq 0$ nên $-1 < x_0, y_0 < 1, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$. Ta có :

Phương trình đường thẳng AM :

$$\frac{x+1}{x_0+1} = \frac{y}{y_0} \qquad (1).$$

Phương trình đường thẳng BN :

$$\frac{x-1}{x_0-1} = \frac{y}{-y_0} \qquad (2).$$

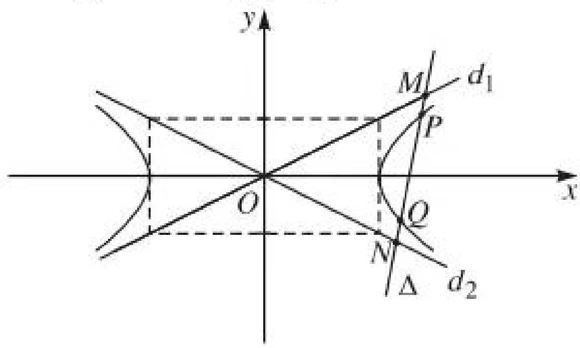


Hình 117

Toạ độ $(x ; y)$ của K thoả mãn (1) và (2). Nhân từng vế của (1) và (2) với nhau, ta được : $\frac{x^2-1}{x_0^2-1} = \frac{y^2}{-y_0^2}$. Vì $M \in (\mathscr{C})$ nên $x_0^2 + y_0^2 = 1$, suy ra $x_0^2 - 1 = -y_0^2$. Do đó $x^2 - 1 = y^2$ hay $x^2 - y^2 = 1$. Tập hợp các điểm K là hypebol $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$ bỏ đi hai đỉnh : $(-1 ; 0)$ và $(1 ; 0)$.

83. (h. 118)

a) Phương trình (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Hình 118

Phương trình chung của các đường tiệm cận d_1, d_2 là : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

Gọi phương trình của Δ là :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Giả sử $\beta \neq 0$, khi đó, do vế trái của phương trình (H) và phương trình các đường tiệm cận giống nhau nên :

• Hoành độ các giao điểm P và Q của Δ và (H) là nghiệm của phương trình dạng :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

• Hoành độ các giao điểm M và N của Δ và các tiệm cận là nghiệm của phương trình dạng :

$$ax^2 + bx + d = 0.$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của PQ và MN, thì ta có : $x_I = x_J = -\dfrac{b}{2a}.$

Suy ra I trùng với J. Vậy $MP = NQ$.

Nếu $\beta = 0$, thì Δ là đường thẳng vuông góc với Ox. Vì (H) và hai đường tiệm cận đều nhận Ox làm trục đối xứng nên dễ có $MP = NQ$.

b) Gọi $\vec{u}(m\,;n)$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$ là vectơ chỉ phương của Δ và kí hiệu $P = (x_0\,;y_0)$.

Khi đó tồn tại các số t_1, t_2 sao cho $\overrightarrow{PM} = t_1\vec{u}$, $\overrightarrow{PN} = t_2\vec{u}$.

Ta có toạ độ của M và N là : $\begin{cases} x_M = x_0 + t_1 m \\ y_M = y_0 + t_1 n, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_N = x_0 + t_2 m \\ y_N = y_0 + t_2 n. \end{cases}$

M, N thuộc hai tiệm cận của (H) nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình :

$$\frac{(x_0 + tm)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + tn)^2}{b^2} = 0 \text{ hay } \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0 m}{a^2} - \frac{y_0 n}{b^2}\right)t + 1 = 0.$$

Rõ ràng $\dfrac{m^2}{a^2} - \dfrac{n^2}{b^2} \neq 0.$

Do đó $\qquad t_1.t_2 = \dfrac{1}{\dfrac{m^2}{a^2} - \dfrac{n^2}{b^2}} = \dfrac{a^2b^2}{m^2b^2 - n^2a^2}.$

Vậy $\overline{PM}.\overline{PN} = \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN} = t_1.t_2.\vec{u}^2 = \dfrac{a^2.b^2}{m^2b^2 - n^2a^2}\cdot(m^2 + n^2)$ không đổi.