§6. Đường hypebol

I – CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và hằng số $2a$ $(a < c)$. Hypebol (H) là tập hợp các điểm M sao cho $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$.

$$(H) = \left\{M : \left|MF_1 - MF_2\right| = 2a\right\}.$$

F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của (H).

2. Phương trình chính tắc của hypebol : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (h. 87)

$c^2 = a^2 + b^2$; *O là tâm đối xứng; Ox, Oy là các trục đối xứng.*

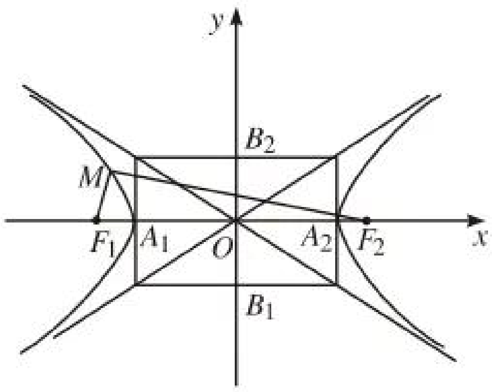
Trục thực $A_1A_2 = 2a$ *nằm trên Ox.*

Trục ảo $B_1B_2 = 2b$ *nằm trên Oy.*

Hai đỉnh : $A_1(-a\,;0)$, $A_2(a\,;0)$.

Hai tiêu điểm : $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$.

Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$.



Hình 87

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a$, $y = \pm b$.

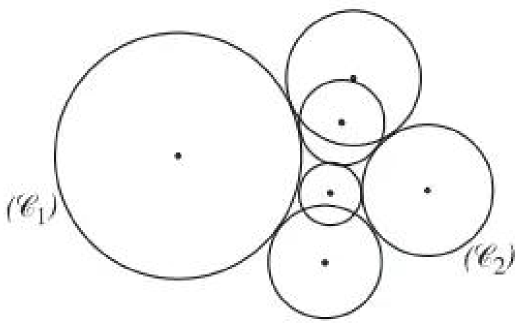
Phương trình hai đường tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x$;

Bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M\,;y_M) \in (H)$:

$$MF_1 = |a + ex_M| = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| \;;\; MF_2 = |a - ex_M| = \left|a - \frac{c}{a}x_M\right|.$$

II – ĐỀ BÀI

72. (h.88) Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ nằm ngoài nhau và có bán kính không bằng nhau. Chứng minh rằng tâm của các đường tròn cùng tiếp xúc ngoài hoặc cùng tiếp xúc trong với $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ nằm trên một hypebol với các tiêu điểm là tâm của các đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$. Tâm đối xứng của hypebol này nằm ở đâu ?



Hình 88

73. Xác định độ dài trục thực, trục ảo ; tiêu cự ; tâm sai ; toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$;

b) $4x^2 - y^2 = 4$;

c) $16x^2 - 25y^2 = 400$;

d) $16x^2 - 9y^2 = 16$;

e) $x^2 - y^2 = 1$;

f) $mx^2 - ny^2 = 1$ $(m > 0, n > 0)$.

Vẽ các hypebol có phương trình ở câu a), b) và e).

74. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết

a) Một tiêu điểm là $(5 ; 0)$, một đỉnh là $(-4 ; 0)$;

b) Độ dài trục ảo bằng 12, tâm sai bằng $\frac{5}{4}$;

c) Một đỉnh là $(2 ; 0)$, tâm sai bằng $\frac{3}{2}$;

d) Tâm sai bằng $\sqrt{2}$, (H) đi qua điểm $A(-5 ; 3)$;

e) (H) đi qua hai điểm $P(6 ; -1)$ và $Q(-8 ; 2\sqrt{2})$.

75. Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết

a) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm 1$;

b) Một đỉnh là $(3 ; 0)$ và phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $x^2 + y^2 = 16$;

c) Một tiêu điểm là $(-10 ; 0)$ và phương trình các đường tiệm cận là $y = \pm \frac{4x}{3}$;

d) (H) đi qua $N(6 ; 3)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60°.

76. Cho số $m > 0$. Chứng minh rằng hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-m ; -m)$, $F_2(m ; m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên (H) tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình : $xy = \frac{m^2}{2}$.

77. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tuỳ ý trên (H) đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

78. Cho hai điểm $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$ và đường thẳng Δ : $x - \frac{1}{4} = 0$.

a) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MB = 2MH$, với H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ.

b) Tìm tập hợp các điểm N sao cho các đường thẳng AN và BN có tích các hệ số góc bằng 2.

79. Tìm các điểm trên hypebol $(H) : 4x^2 - y^2 - 4 = 0$ thoả mãn

a) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông ;

b) Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 120^o ;

c) Có toạ độ nguyên.

80. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm và A_1, A_2 là các đỉnh của (H). M là điểm tuỳ ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là N. Chứng minh rằng

a) $OM^2 - MF_1 . MF_2 = a^2 - b^2$;

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$;

c) $NM^2 = \dfrac{b^2}{a^2} . \overline{NA_1} . \overline{NA_2}$.

81. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ và đường thẳng $\Delta : x - y + m = 0$.

a) Chứng minh rằng Δ luôn cắt (H) tại hai điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (H) $(x_M < x_N)$;

b) Gọi F_1 là tiêu điểm trái và F_2 là tiêu điểm phải của (H). Xác định m để $F_2N = 2F_1M$.

82. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn $(\mathscr{C})$ cắt Ox tại $A(-1 ; 0)$ và $B(1 ; 0)$. Đường thẳng d có phương trình $x = m$ $(-1 < m < 1$, $m \neq 0)$ cắt $(\mathscr{C})$ tại M và N. Đường thẳng AM cắt đường thẳng BN tại K. Tìm tập hợp các điểm K khi m thay đổi.

83. Cho hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại P, Q và hai đường tiệm cận ở M và N. Chứng minh rằng

a) $MP = NQ$;

b) Nếu Δ có phương không đổi thì tích $\overline{PM} . \overline{PN}$ là hằng số.