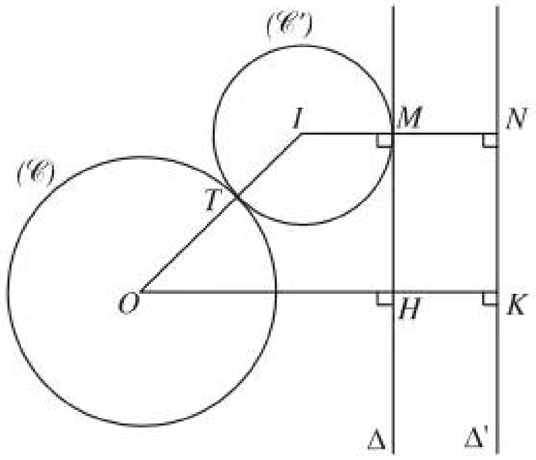
§7. Đường parabol

84. (h. 119) Kẻ OH vuông góc với Δ và kéo dài OH (về phía H) một đoạn $HK = R$.

Dựng đường thẳng Δ' đi qua K và song song với Δ. Khi đó Δ' cố định và không đi qua O.

Xét đường tròn $(\mathscr{C}')$ tâm I tiếp xúc ngoài với $(\mathscr{C})$ tại T và tiếp xúc với Δ tại M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng IM và Δ'.



Hình 119

Ta có : $IO = OT + TI = R + IM$

$= IN = d\,(I\ ;\ \Delta')$.

Vậy I nằm trên parabol nhận O làm tiêu điểm và Δ' làm đường chuẩn.

85. a) Phương trình có dạng : $y^2 = 2px$ với $2p = 4$. Suy ra $p = 2$. Vậy parabol có : tham số tiêu $p = 2$, đỉnh $O(0\ ;\ 0)$, tiêu điểm $F(1\ ;\ 0)$, đường chuẩn $\Delta : x = -1$.

Parabol được vẽ như hình 120.

b) $2y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}x.$

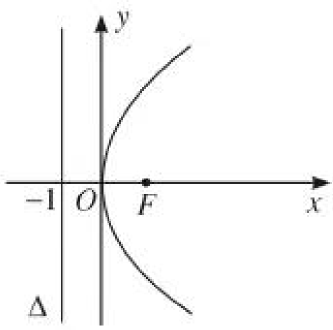
$2p = \dfrac{1}{2} \Rightarrow p = \dfrac{1}{4}$. Parabol có : đỉnh $O(0\ ;\ 0)$,

tiêu điểm $F\left(\dfrac{1}{8}\ ;\ 0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\dfrac{1}{8}\cdot$

c) $5y^2 = 12x \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{12}{5}x.$

$2p = \dfrac{12}{5} \Rightarrow p = \dfrac{6}{5}\cdot$ Parabol có : đỉnh $O(0\ ;\ 0)$,

tiêu điểm $F\left(\dfrac{3}{5}\ ;\ 0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\dfrac{3}{5}\cdot$



Hình 120

d) $2p = \alpha \Rightarrow p = \dfrac{\alpha}{2}$. Parabol có : đỉnh $O(0 ; 0)$, tiêu điểm $F\left(\dfrac{\alpha}{4} ; 0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\dfrac{\alpha}{4}$ với $\alpha > 0$.

86. Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px \quad (p > 0)$.

a) $F(1 ; 0)$ là tiêu điểm $\Rightarrow \dfrac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$.

Phương trình của (P) là $y^2 = 4x$.

b) $y^2 = 10x$; c) $y^2 = 8x$.

d) Từ giả thiết và do (P) nhận Ox là trục đối xứng, nên (P) đi qua điểm $(1 ; 4)$. Suy ra $p = 8$. Phương trình của (P) là $y^2 = 16x$.

87. a) Kí hiệu (P) là parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ.

$M(x ; y) \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M ; \Delta) \Leftrightarrow MF^2 = d^2(M ; \Delta)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{(x+y+1)^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 9 = 0.$

Vậy (P) có phương trình : $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 9 = 0$.

b) Xét điểm tuỳ ý $M(x ; y) \in (P)$, hãy biến đổi điều kiện $MF = d(M ; \Delta)$ qua toạ độ, dẫn đến phương trình $y = ax^2 + bx + c$.

88. Phương trình các cạnh của tam giác là : $y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$, $x - 5 = 0$.

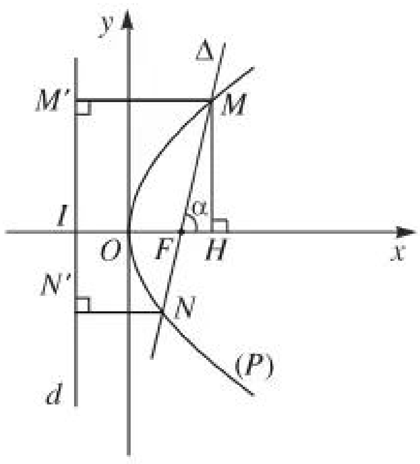
89. (h. 121) Gọi H, M' thứ tự là hình chiếu của M trên Ox và đường chuẩn d của parabol (P), còn I là giao điểm của Ox và d. Ta có :

$MF = MM' = IH$.

$\overline{IH} = \overline{IF} + \overline{FH} \Rightarrow IH = p + \overrightarrow{FM}.\vec{i}$

$= p + MF\cos\alpha$

$\Rightarrow MF = \dfrac{p}{1 - \cos\alpha}$.



Hình 121

Do $\left(\overrightarrow{FN}, \vec{i}\right) = 180^{\circ} - \alpha$ nên tương tự như trên, ta cũng có

$$NF = \frac{p}{1 - \cos(180^{\circ} - \alpha)} = \frac{p}{1 + \cos\alpha}.$$

b) $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{p} + \dfrac{1 + \cos\alpha}{p} = \dfrac{2}{p}$ không đổi.

c) $FM.FN = \dfrac{p}{1 - \cos\alpha} \cdot \dfrac{p}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{p^2}{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{p^2}{\sin^2\alpha}$.

$FM.FN$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin^2\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \Delta \perp Ox$.

90. (h. 122) Gọi I là trung điểm của MN còn M', I', N' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, I, N trên Δ. Khi đó

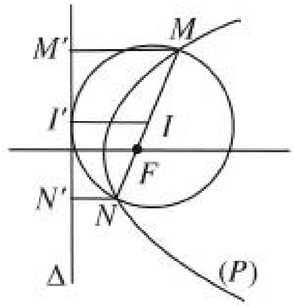
$$II' = \frac{1}{2}(MM' + NN') = \frac{1}{2}(MF + NF) \qquad (1)$$

(do $M, N \in (P)$).

Vì đường tròn đường kính MN (tâm là I) tiếp xúc với Δ nên

$$II' = \frac{1}{2}MN. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN = MF + NF$. Vậy M, F, N thẳng hàng.



Hình 122

91. (h. 123) Phương trình đường thẳng $AB : x - 2y - 3 = 0$.

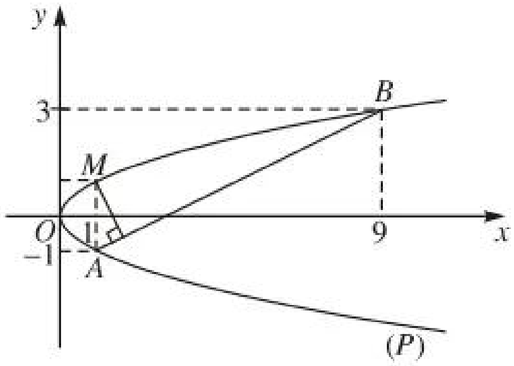
Vì $M(x\,;y)$ nằm trên cung AB của (P) nên $-1 \le y \le 3$.

Ta có : $S_{MAB} = \dfrac{1}{2}AB.d(M\,;AB) = \dfrac{1}{2}.\sqrt{(9-1)^2 + (3+1)^2} \cdot \dfrac{|x - 2y - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} =$

$$= 2|x - 2y - 3| = 2\left|y^2 - 2y - 3\right|.$$

Ta có $f(y) = y^2 - 2y - 3 = (y-1)^2 - 4 \ge -4$.

Suy ra $f(y)$ nhỏ nhất bằng -4 khi và chỉ khi $y = 1$. Mặt khác, $f(-1) = f(3) = 0$. Do đó trên đoạn $[-1 ; 3]$, hàm số $\left|y^2 - 2y - 3\right|$ lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi $y = 1$. Vậy S_{MAB} lớn nhất bằng 8 khi và chỉ khi $M = (1 ; 1)$.

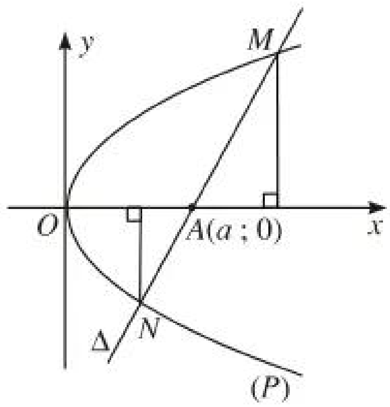


Hình 123

92. (h. 124) Chọn hệ trục toạ độ Oxy thích hợp sao cho parabol (P) có phương trình : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và $A = (a ; 0)$.

Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình : $\alpha(x - a) + \beta y = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Khi đó tung độ các giao điểm của đường thẳng Δ và (P) là nghiệm của phương trình :



Hình 124

$$\alpha \cdot \frac{y^2}{2p} + \beta y - \alpha a = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha y^2 + 2p\beta y - 2p\alpha a = 0 \qquad (1).$$

Rõ ràng $\alpha \neq 0$, vì nếu $\alpha = 0$ thì đường thẳng Δ trùng với trục hoành và chỉ cắt (P) tại một điểm.

Do đó $|y_M| . |y_N| = |y_M . y_N| = \left|-\dfrac{2p\alpha a}{\alpha}\right| = 2p|a|$.

93. Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho O trùng A, AB nằm trên tia Ox, AD nằm trên tia Oy. Đặt $AB = a$, $AD = b$. Hãy tìm toạ độ của I_k và chứng minh I_k nằm trên parabol có phương trình dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$.