§8. Ba đường cônic

94. a) Đây là elip có $c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$, ta có các tiêu điểm : $F_1 = (-2 ; 0)$, $F_2 = (2 ; 0)$; các đường chuẩn : $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm 4$.

b) Đây là hypebol có $c^2 = a^2 + b^2 = 35 \Rightarrow c = \sqrt{35}$, ta có các tiêu điểm : $F_1 = (-\sqrt{35}\,;0)$, $F_2 = (\sqrt{35}\,;0)$; các đường chuẩn : $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{15}{\sqrt{35}}$.

c) Đây là parabol có $p = 3$, ta có tiêu điểm $F = \left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$; đường chuẩn : $x = -\dfrac{3}{2}$.

95. a) Gọi $M(x\,;y)$ thuộc cônic. Khi đó $MF = e.d(M\,;\Delta) \Leftrightarrow MF^2 = e^2.d^2(M\,;\Delta)$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2 - 6x - 2y + 10 = 0.$

b) $x^2 + \dfrac{3}{4}y^2 + 2x - 8y + 17 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 10y - 29 = 0.$

d) $2x^2 - 7y^2 + 12xy + 24x + 32y + 62 = 0.$

96. (h. 125) Xét hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (H) có :

Các tiêu điểm : $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$.

Các đường chuẩn :

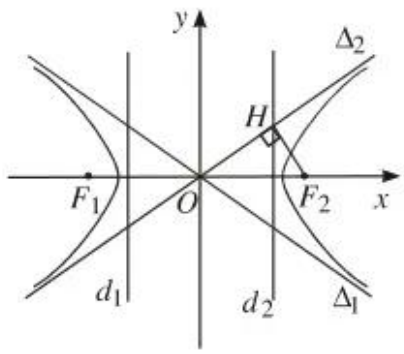
$$d_1 : x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c},$$

$$d_2 : x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

Các tiệm cận :

$$\Delta_1 : y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

$$\Delta_2 : y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$



Hình 125

Gọi $H = d_2 \cap \Delta_2$. Suy ra toạ độ của H bằng $\left(\dfrac{a^2}{c}\,;\dfrac{ab}{c}\right)$.

Do đó $\overrightarrow{OH} = \left(\dfrac{a^2}{c}\,;\dfrac{ab}{c}\right)$; $\overrightarrow{HF_2} = \left(c - \dfrac{a^2}{c}\,;-\dfrac{ab}{c}\right)$.

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{HF_2} = \frac{a^2}{c}\left(c - \frac{a^2}{c}\right) + \frac{ab}{c}.\left(-\frac{ab}{c}\right)$$

$$= a^2 - \frac{a^4}{c^2} - \frac{a^2b^2}{c^2} = a^2 - \frac{a^2}{c^2}(a^2 + b^2) = a^2 - \frac{a^2}{c^2}.c^2 = 0.$$

Vậy $OH \perp F_2H$. Do (H) nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng và Δ_1, Δ_2 cũng nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên ta suy ra điều cần chứng minh.

97. (h. 126) Gọi I là trung điểm của AB ; A', B', I' lần lượt là hình chiếu của A, B, I trên đường chuẩn $d_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$.

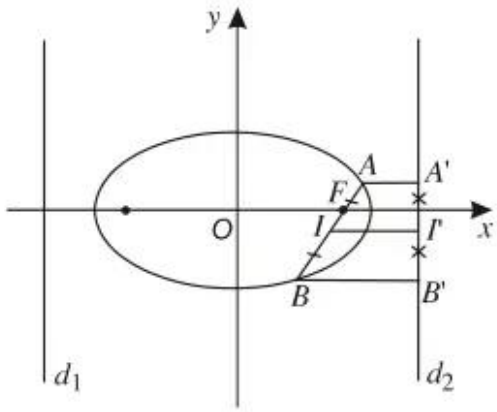
Ta sẽ chứng minh :

$$II' > \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AA' + BB' > AB.$$

Ta có :

$$AB = AF + BF = e.AA' + e.BB'$$
$$= e(AA' + BB') < AA' + BB' = 2II'$$

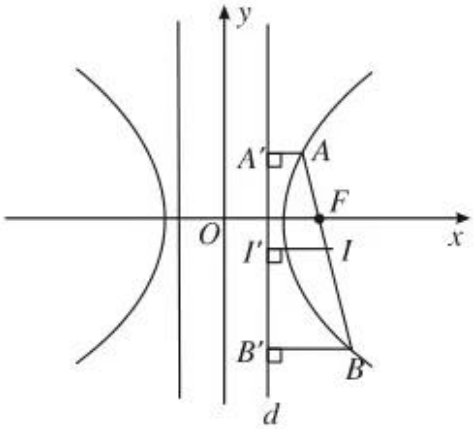
(do $e < 1$). Suy ra điều phải chứng minh.



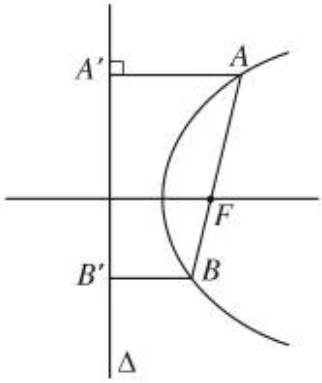
Hình 126

98. (h. 127) Làm tương tự như bài 97, ta cũng được :

$AB = e(AA' + BB') > AA' + BB' = 2II'$. Vậy đường tròn đường kính AB luôn cắt đường chuẩn $d : x = \dfrac{a}{e}$.



Hình 127



Hình 128

99. (h. 128) Gọi A', B' thứ tự là hình chiếu của A, B trên đường chuẩn Δ của (P) ; F là tiêu điểm của (P). Ta có : $A, B \in (P) \Rightarrow AF = d(A ; \Delta) = AA'$, $BF = d(B ; \Delta) = BB'$. Suy ra $AF + BF = AA' + BB' = AB$.

Vậy A, B, F thẳng hàng hay AB đi qua F.