BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, $AB = AD = \frac{1}{2}BC = 1$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

a) Biểu thị các vectơ sau đây theo hai vectơ $\vec{b}$ và $\vec{d}$: $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm sao cho $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Chứng minh $AN // CM$ và $BN // DM$.

c) Tính diện tích hai tam giác ANB và DNC.

d) Tính diện tích hình bình hành tạo bởi các đường thẳng AN, CM, BN, DM.

2. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $a = b\cos C + c\cos B$;

b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$;

c) $h_a = 2R \sin B \sin C$;

d) $bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$;

e) Nếu H là trực tâm tam giác ABC thì :

$$BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2 = AB^2 + HC^2.$$

3. Tam giác ABC có trung tuyến AA_1, đường cao BB_1 và phân giác CC_1 đồng quy. Tìm hệ thức liên hệ giữa ba cạnh của tam giác.

4. Trên các cạnh AC và BC của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\frac{AM}{MC} = \frac{NC}{NB} = k$, trên MN lấy điểm P sao cho $\frac{PM}{PN} = k$. Gọi S, S_1 và S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, APM và BPN. Chứng minh $\sqrt[3]{S} = \sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2}$.

5. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$. Kẻ đường phân giác AD, biết $b' = DC$, $c' = DB$. Đặt $l = AD$.

a) Tính l theo b, c, b', c'.

b) Tính l theo a, b, c.

6. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một đường thẳng d không cắt đường tròn đó. Một điểm I thay đổi trên d. Kẻ tiếp tuyến IT tới đường tròn với T là tiếp điểm. Gọi (I) là đường tròn tâm I bán kính $r = IT$. Chứng minh rằng các đường tròn (I) luôn luôn đi qua hai điểm cố định khi I thay đổi.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$ phụ thuộc vào tham số m, có phương trình lần lượt là :

$$\Delta(m) : \quad \sqrt{1-m^2}\,x - my = 0,$$

$$\Delta'(m) : \sqrt{1-m^2}\,x - (m+1)y + \sqrt{1-m^2} = 0,$$

trong đó $-1 < m < 1$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng $\Delta(m)$ luôn đi qua một điểm cố định và đường thẳng $\Delta'(m)$ cũng luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm toạ độ giao điểm M của $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

d) Với giá trị nào của m thì góc giữa hai đường thẳng $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$ bằng 60° ?

8. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

a) Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ đối xứng với đường tròn $(\mathscr{C})$ qua đường thẳng $4x - 3y = 0$.

c) Gọi M là điểm có toạ độ $M = (0\ ;\ m)$. Gọi MT và MT' là hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm T và T'. Chứng minh rằng đường thẳng TT' luôn đi qua một điểm cố định.

9. Cho phương trình : $x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 4m = 0.$ (1)

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình của một đường tròn trong hệ toạ độ Oxy ?

b) Khi m thay đổi, tìm quỹ tích tâm của các đường tròn (1).

c) Chứng minh rằng các đường tròn (1) luôn đi qua hai điểm cố định.

10. Trong hệ toạ độ Oxy cho bốn điểm $P(3; 2)$, $Q(-3; 2)$, $R(-3; -2)$, $S(3; -2)$.

a) Viết phương trình elip (E) và hypebol (H) cùng có hình chữ nhật cơ sở là $PQRS$.

b) Tìm toạ độ giao điểm của elip (E) với các đường tiệm cận của hypebol (H).

11. Trong hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm $F = (1; 1)$ và d là đường trung trực của đoạn thẳng OF. Viết phương trình đường cônic có tiêu điểm F, đường chuẩn d và có tâm sai lần lượt là :

a) $e = \sqrt{2}$; b) $e = 1$; c) $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.