B. LỜI GIẢI - HƯỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

1. a) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{d} - \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = 2\vec{d}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = 2\vec{d} - (\vec{d} - \vec{b}) = \vec{b} + \vec{d}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + 2\vec{d}$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{\vec{b}}{2} - (\vec{b} + 2\vec{d}) = -\frac{\vec{b} + 4\vec{d}}{2},$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{d} + \frac{\vec{b} + \vec{d}}{3} = \frac{\vec{b} + 4\vec{d}}{3} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}.$$

Vậy $CM \,//AN$.

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{d} = \frac{\vec{b} - 2\vec{d}}{2},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \vec{d} - \vec{b} + \frac{\vec{b} + \vec{d}}{3} = \frac{-2\vec{b} + 4\vec{d}}{3} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}.$$

Vậy $DM \,//BN$.

c) • Gọi φ là góc hợp bởi $\overrightarrow{NA}$ và $\overrightarrow{NB}$, ta có $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB}}{NA.NB}$.

Theo câu b) ta có $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NB} = \dfrac{(\vec{b} + 4\vec{d})(-2\vec{b} + 4\vec{d})}{9} = \dfrac{-2 + 16}{9} = \dfrac{14}{9}$.

$$NA = \sqrt{\left(\frac{\vec{b} + 4\vec{d}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3},\ NB = \sqrt{\left(\frac{-2\vec{b} + 4\vec{d}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Suy ra : $\cos\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{85}}$.

Vậy $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \dfrac{6}{\sqrt{85}}$.

Vậy $S_{ANB} = \dfrac{1}{2}NA.NB.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{17}}{3}.\dfrac{\sqrt{20}}{3}.\dfrac{6}{\sqrt{85}} = \dfrac{2}{3}$.

• Theo câu a), ta có góc $CMD = \varphi$.

Theo câu b) ta có $MC = \sqrt{\left(\dfrac{\vec{b} + 4\vec{d}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{17}}{2},\ MD = \sqrt{\left(\dfrac{-\vec{b} + 2\vec{d}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy : $S_{CMD} = \dfrac{1}{2}MC.MD.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{17}}{2}.\dfrac{\sqrt{5}}{2}.\dfrac{6}{\sqrt{85}} = \dfrac{3}{4}$.

d) Do M là trung điểm của AB nên hình bình hành cũng nhận các trung điểm của NA và NB làm đỉnh. Vậy diện tích hình bình hành đó bằng nửa diện tích tam giác ANB hay bằng $\dfrac{1}{3}$.

2. a) Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Bằng cách nhân hai vế với $\overrightarrow{BC}$ ta được :

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow a^2 = ca.\cos B + ba\cos C$$
$$\Leftrightarrow a = b\cos C + c\cos B.$$

b) Thay $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ vào công thức cuối ở câu a), ta được điều cần chứng minh.

c) Ta có $a.h_a = 2S = \dfrac{abc}{2R} = \dfrac{a.2R\sin B.2R\sin C}{2R} \Leftrightarrow h_a = 2R\sin B\sin C$.

d) Chú ý rằng $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ và từ các công thức tương tự, ta có :

$$bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) +$$

$$+ (c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)\Big] = 0.$$

e) $BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{CA}^2 = \overrightarrow{BH}^2 - \overrightarrow{HA}^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{HA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{HA}\right). \qquad (*)$$

Nếu ta gọi C' là chân đường cao hạ từ C của tam giác ABC thì vectơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ và vectơ $\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{HA}$ có hình chiếu trên đường thẳng BA đều là $\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{C'A}$. Vậy đẳng thức (*) được chứng minh và do đó

$$BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2.$$

Đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

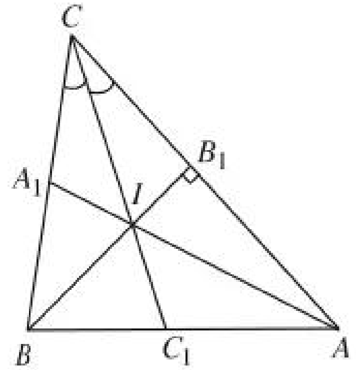
3. (h. 136) Ta đặt : $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$.

Khi đó $|\vec{u}| = CA = b$ và $|\vec{v}| = CB = a$. Giả sử trung tuyến AA_1 cắt phân giác CC_1 tại I, khi đó

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{CA}{CA_1} = \frac{2b}{a}$$

hay là $a.IA = 2b.IA_1$. Vì I nằm giữa A và A_1 nên $a.\overrightarrow{IA} = -2b.\overrightarrow{IA_1}$

$$\Leftrightarrow a\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI}\right) = -2b\left(\overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CI}\right).$$



Hình 136

Suy ra $\overrightarrow{CI} = \dfrac{a.\overrightarrow{CA} + 2b\overrightarrow{CA_1}}{a + 2b} = \dfrac{a\vec{u} + b\vec{v}}{a + 2b}$.

Do đó ta có

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CB} = \frac{a\vec{u} + b\vec{v}}{a + 2b} - \vec{v} = \frac{a\vec{u} - (a + b)\vec{v}}{a + 2b}.$$

Vì đường cao BB_1 đi qua I nên $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CA} = 0$, hay $\left[a\vec{u} - (a + b)\vec{v}\right].\vec{u} = 0$.

Suy ra :

$$a\vec{u}^2 - (a+b)\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow a.b^2 - (a+b)ab\cos C = 0$$

$$\Rightarrow ab^2 - \frac{1}{2}(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 0$$

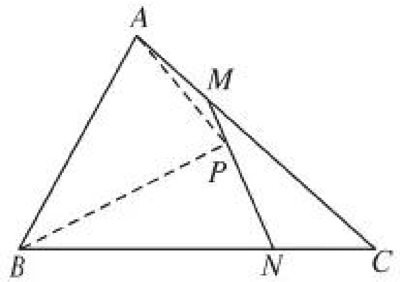
$$\Rightarrow 2ab^2 - a(a^2+b^2-c^2) - b(a^2+b^2-c^2) = 0$$

$$\Rightarrow -a(a^2-b^2-c^2) - b(a^2+b^2-c^2) = 0$$

Vậy ta có liên hệ : $a(-a^2+b^2+c^2) = b(a^2+b^2-c^2)$.

4. (h. 137) Từ giả thiết $\frac{AM}{MC} = k$, ta suy ra :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{k}{k+1} \text{ và } \frac{MC}{AC} = \frac{1}{k+1}.$$



Hình 137

Tương tự như thế :

$$\frac{NC}{BC} = \frac{k}{k+1}, \quad \frac{NB}{BC} = \frac{1}{k+1}, \frac{PM}{MN} = \frac{k}{k+1},$$

$$\frac{PN}{MN} = \frac{1}{k+1}.$$

Từ đó suy ra :

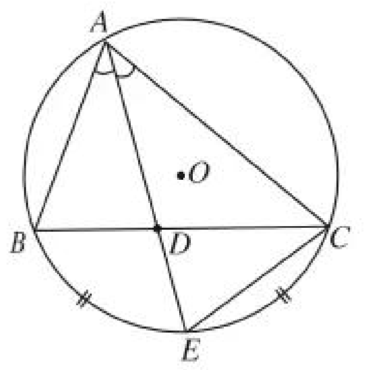
$$S_1 = S_{APM} = \frac{k}{k+1}S_{AMN} = \frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}S_{ACN}$$

$$= \frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}.\frac{k}{k+1}S_{ABC} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^3 S.$$

Tính toán tương tự, ta có $S_2 = \left(\frac{1}{k+1}\right)^3 S$.

Vậy

$$\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} = \frac{k}{k+1}\sqrt[3]{S} + \frac{1}{k+1}\sqrt[3]{S} = \sqrt[3]{S}.$$



Hình 138

5. (h. 138) a) Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt (O) tại E. Ta có $AD.DE = DB.DC$, tức là :

$$l.\,DE = b'c'.$$

Dễ thấy hai tam giác AEC và ABD đồng dạng, do đó :

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AB} \text{ hay } bc = l\,(l+DE) = l^2 + l.DE = l^2 + b'c'.$$

Vậy ta có $l^2 = bc - b'c'$ hay $l = \sqrt{bc - b'c'}$.

b) Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{b'}{c'}=\frac{b}{c}.$$

Từ đó, ta có :

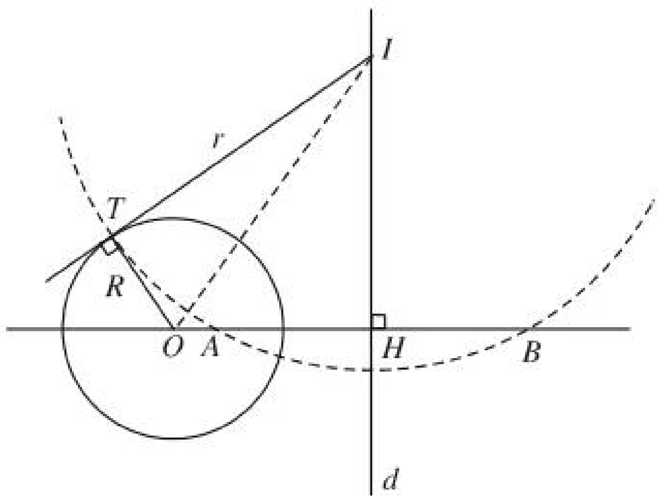
$$\frac{b'}{b'+c'}=\frac{b}{b+c},\quad \frac{c'}{b'+c'}=\frac{c}{b+c}. \text{ Suy ra } b'=\frac{ab}{b+c},\quad c'=\frac{ac}{b+c}.$$

Vậy từ câu a), ta có

$$l=\sqrt{bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}}{b+c}.$$

6. (h. 139) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với d tại H. Hai tam giác vuông OHI và OTI có chung cạnh huyền OI, còn $OH > OT = R$ (vì d không cắt (O)). Suy ra $IH < IT$.



Hình 139

Vậy đường thẳng OH cắt đường tròn (I) tại hai điểm A và B nào đó đối xứng với nhau qua d.

Ta có $\overrightarrow{OT}^2 = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}\right)$

$\Leftrightarrow R^2 = \left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{HA}\right) = OH^2 - HA^2.$

Bởi vậy, nếu đặt $OH = h$ thì $HA = HB = \sqrt{h^2 - R^2}$. Suy ra (I) đi qua hai điểm A, B cố định.

7. a) Hiển nhiên đường thẳng $\Delta(m)$ luôn luôn đi qua gốc toạ độ O. Phương trình của $\Delta'(m)$ có thể viết dưới dạng : $\sqrt{1-m^2}(x+1)-(m+1)y=0$, nên $\Delta'(m)$ luôn đi qua điểm $(-1\,;0)$.

b) Giải hệ
$$\begin{cases}\sqrt{1-m^2}x-my=0\\ \sqrt{1-m^2}x-(m+1)y+\sqrt{1-m^2}=0\end{cases}$$

ta được giao điểm M có toạ độ $x=m$ và $y=\sqrt{1-m^2}$.

c) Theo câu b), toạ độ $(x\,;y)$ của M thoả mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Vậy M luôn nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$.

d) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $\Delta(m)$ và $\Delta'(m)$ thì :

$$\cos\varphi=\frac{\left|\left(\sqrt{1-m^2}\right)^2+m(m+1)\right|}{\sqrt{(1-m^2)+m^2}.\sqrt{(1-m^2)+(m+1)^2}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{2(m+1)}}=\sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

$$\varphi=60^\circ\Leftrightarrow\cos\varphi=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{m+1}{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$.

8. a) Tâm đường tròn là $I(2\,;0)$, bán kính $R=1$.

b) Đường tròn $(\mathscr{C}')$ có bán kính bằng 1 và có tâm I' là điểm đối xứng với I qua đường thẳng $d: 4x-3y=0$. Giả sử $I'=(x\,;y)$ thì vectơ $\overrightarrow{II'}=(x-2\,;y)$ phải vuông góc với vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3\,;4)$, tức là $3(x-2)+4y=0$, hay $3x+4y-6=0$. (1)

Ngoài ra trung điểm của II' là $P=\left(\dfrac{x+2}{2};\dfrac{y}{2}\right)$ phải nằm trên d, tức là :

$$\frac{4(x+2)}{2}-\frac{3y}{2}=0\quad\text{hay } 4x-3y+8=0. \qquad (2)$$

Giải hệ hai phương trình (1) và (2) ta được toạ độ I' là $x = -\dfrac{14}{25}$, $y = \dfrac{48}{25}$.

Vậy phương trình đường tròn ($\mathscr{C}'$) là $\left(x + \dfrac{14}{25}\right)^2 + \left(y - \dfrac{48}{25}\right)^2 = 1$.

c) Hiển nhiên hai tiếp điểm T và T' đều nằm trên đường tròn ($\mathscr{C}_1$) có đường kính là MI. Đường tròn đó có tâm là trung điểm Q của MI, $Q = \left(1 ; \dfrac{m}{2}\right)$ và có bán kính $r = QI = \sqrt{1 + \dfrac{m^2}{4}}$. Vậy ($\mathscr{C}_1$) có phương trình :

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = 1 + \frac{m^2}{4} \text{ hay } x^2 + y^2 - 2x - my = 0.$$

Hai tiếp điểm T và T' là giao điểm của hai đường tròn ($\mathscr{C}$) và ($\mathscr{C}_1$) nên toạ độ của chúng là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - my = 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình trên, ta suy ra $2x - my - 3 = 0$. (*)

Toạ độ của T và T' là các nghiệm của hệ phương trình trên nên cũng là nghiệm của phương trình (*). Suy ra (*) chính là phương trình của đường thẳng TT'. Đường thẳng đó luôn đi qua điểm cố định $S\left(\dfrac{3}{2} ; 0\right)$.

9. a) Viết (1) dưới dạng :

$$(x-m)^2 + (y-m-1)^2 = m^2 + (m+1)^2 - 4m = m^2 + (m-1)^2.$$

Vì $m^2 + (m-1)^2 > 0$,

với mọi m nên (1) là phương trình đường tròn với mọi m.

b) Tâm I của đường tròn (1) có toạ độ : $x = m$; $y = m + 1$. Suy ra quỹ tích các điểm I là đường thẳng có phương trình $y = x + 1$.

c) Ta tìm cặp số $(x_0 ; y_0)$ sao cho $x_0^2 + y_0^2 - 2mx_0 - 2(m+1)y_0 + 4m = 0$ với mọi m.

Biến đổi đẳng thức trên ta có : $2m(2 - x_0 - y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 = 0$ với mọi m.

Từ đó suy ra : $2 - x_0 - y_0 = 0$ và ${x_0}^2 + {y_0}^2 - 2y_0 = 0$. Giải ra ta có hai cặp số $(1 ; 1)$ và $(0 ; 2)$ là nghiệm. Vậy đường tròn (1) luôn đi qua hai điểm cố định $A(1; 1)$ và $B(0; 2)$.

10. a) Trục lớn của (E) là $2a = PQ = 6$, và trục bé là $2b = QR = 4$. Vậy $a = 3$, $b = 2$. Elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Tương tự (H) có phương trình $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình chung là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$.

Giải hệ gồm hai phương trình (của (E) và của hai đường tiệm cận), ta tìm được toạ độ của bốn giao điểm là

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right); \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right).$$

11. Đường trung trực d của OF cố nhiên đi qua điểm $(0 ; 1)$ và $(1 ; 0)$ nên d có phương trình $x + y - 1 = 0$. Với mọi điểm $M(x ; y)$, gọi MH là khoảng cách từ M đến d thì $MH = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$ và khoảng cách từ M đến F là $MF = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

a) Cônic có tâm sai $e = \sqrt{2}$ là một hypebol. Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = \sqrt{2} \Leftrightarrow MF^2 = 2MH^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+y-1)^2 \Leftrightarrow 2xy = 1.$$

Vậy hypebol đó có phương trình $2xy = 1$, hay cũng có thể viết $y = \frac{1}{2x}$. Đó là hypebol đã biết ở cấp Trung học cơ sở.

b) Cônic có tâm sai $e = 1$ là một parabol. Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0.$$

Parabol có phương trình là $(x-y)^2 - 2(x+y) + 3 = 0$.

c) Cônic có tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là đường elip. Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = (x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) - 2xy - 6(x+y) + 7 = 0.$$