Bài tập ôn tập chương II

82. $A = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 - \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3 - \frac{11\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}$.

$B = \frac{3}{2} - 1 - 4 + 5 = \frac{3}{2}$.

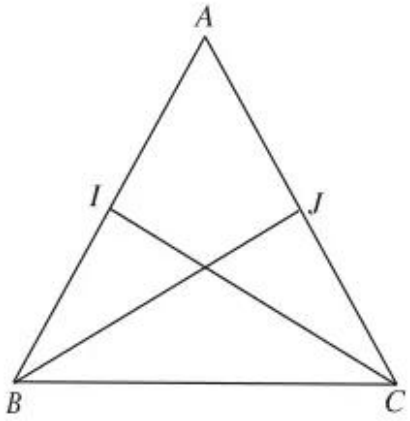
83. (h. 69) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^o = -\frac{1}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BC}) = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BJ}) = \cos 150^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{CI}) = \cos 120^o = -\frac{1}{2}$.



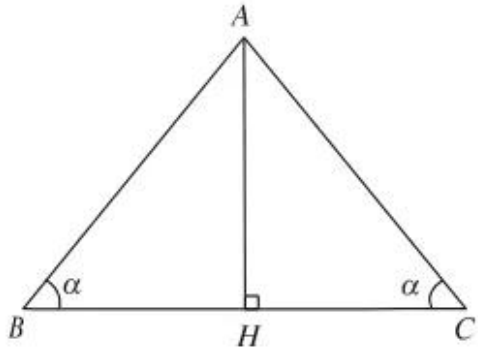
Hình 69

84. (h. 70) Xét tam giác ABC cân đỉnh A có góc ở đáy bằng α, AH là đường cao. Ta có :

$$S = \frac{1}{2}BC.AH = BH.AH,$$

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin(180^o - 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin 2\alpha.$$



Hình 70

Từ đó $AB.AC.\sin 2\alpha = 2BH.AH$,

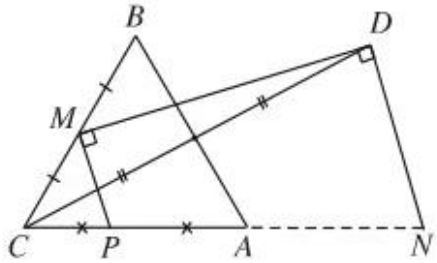
suy ra $\sin 2\alpha = 2.\frac{BH}{AB}.\frac{AH}{AC} = 2\cos\alpha.\sin\alpha$.

85. (h. 71)

Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Khi đó $\overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CM} = \frac{\vec{b}}{2}$ và

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$; $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}$.



Hình 71

a) Giả sử $\overrightarrow{CN} = n\overrightarrow{CA} = n\vec{a}$. Khi đó ta có :

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$ và $\overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CN} = (1-n)\vec{a} + \vec{b}$.

Suy ra : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ND} = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right).\left[(1-n)\vec{a} + \vec{b}\right]$

$$= (1-n)\vec{a}^2 + \frac{\vec{b}^2}{2} + \left(1 + \frac{1-n}{2}\right)\vec{a}.\vec{b}$$

$$= 1 - n + \frac{1}{2} + \frac{3-n}{4} = \frac{9-5n}{4}.$$

Để tam giác MDN vuông tại D ta phải có $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ND} = 0$ hay $n = \frac{9}{5}$.

Vậy $\overrightarrow{CN} = \frac{9}{5}\vec{a}$.

Để tính diện tích tam giác MDN, ta tính bình phương độ dài hai cạnh MD và ND :

$$MD^2 = \overrightarrow{MD}^2 = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}.$$

$ND^2 = \overrightarrow{ND}^2 = \left(-\frac{4}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \frac{16}{25} + 1 - \frac{4}{5} = \frac{21}{25}.$

Vậy $S_{MDN} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{4}.\frac{21}{25}} = \frac{7\sqrt{3}}{20}.$

b) Giả sử $\overrightarrow{CP} = p\overrightarrow{CA} = p\vec{a}$. Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CM} = p\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Khi đó : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MP} = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)\left(p\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right) = p - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{p}{4} = \frac{5p-2}{4}.$

Để tam giác PMD vuông tại M ta phải có $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MP} = 0$ hay $p = \frac{2}{5}$, tức $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\vec{a}.$

Khi đó $MP^2 = \overrightarrow{MP}^2 = \left(\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{21}{100}.$

Vậy $S_{PMD} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{100}.\frac{7}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{40}.$

c) Theo trên, ta có $\overrightarrow{MP} = \frac{2\vec{a}}{5} - \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CP} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{2\vec{a}}{5} = \frac{3\vec{a}}{5} + \vec{b}.$

Bởi vậy : $\overrightarrow{MP}^2 = \frac{4}{25} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{21}{100}$; $\overrightarrow{PD}^2 = \frac{9}{25} + 1 + \frac{3}{5} = \frac{49}{25}$;

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PD} = \frac{6}{25} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} - \frac{1}{2} = -\frac{21}{100}.$$

Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PD}\right|}{\left|\overrightarrow{MP}\right|.\left|\overrightarrow{PD}\right|} = \frac{21}{100} : \left(\sqrt{\frac{21}{100}}.\sqrt{\frac{49}{25}}\right) = \frac{\sqrt{21}}{10}.\frac{5}{7} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

86. a) $2R = \frac{a}{\sin A} = 10 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

b) Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA và AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC (h. 72).

Ta có $AP = AN = r.\cot 30^o = 5$.

$BP + NC = BM + MC = a = 10$.

Từ đó ta có :

$$(b - AN) + (c - AP) = 10$$

hay $\quad b + c = 20. \qquad (1)$

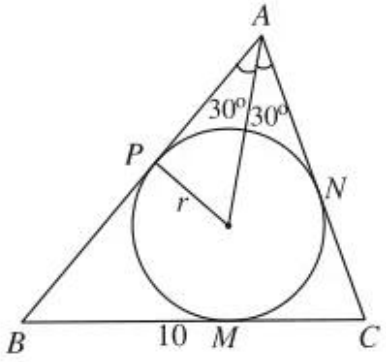
Theo định lí côsin :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^o$$

hay $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - bc$,

suy ra $bc = \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{3} = \dfrac{20^2 - 10^2}{3}$,

do đó $bc = 100. \qquad (2)$



Hình 72

Từ (1) và (2) suy ra b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $b = c = 10$ nên ABC là tam giác đều.

87. a) Ta chỉ phải tìm độ dài cạnh BC.

Áp dụng định lí côsin

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2.10.4.\cos 60^o = 76.$$

Suy ra $BC \approx 8{,}72$.

Chu vi tam giác $2p \approx 10 + 4 + 8{,}72 \approx 22{,}72$.

b) (h. 73)

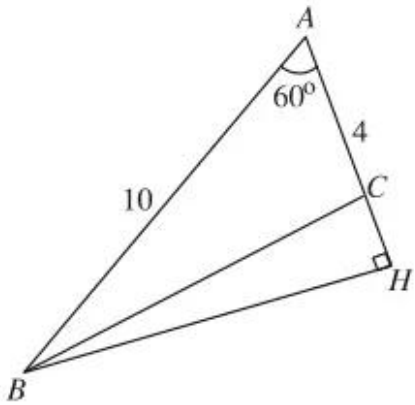
Kẻ đường cao BH ta có

$$AH = AB.\cos 60^o = 5,$$

suy ra $HC = 5 - 4 = 1$.

$BH = AB.\sin 60^o = 5\sqrt{3}$.

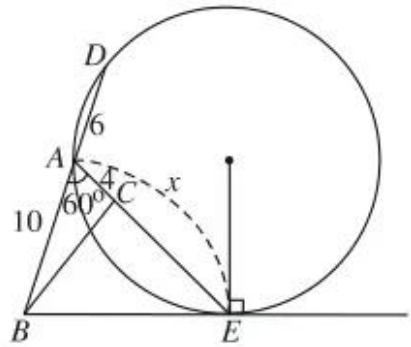
$\tan C = -\tan \widehat{BCH} = -\dfrac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$.



Hình 73

c) (h. 74)

Để BE là tiếp tuyến của đường tròn (ADE) phải có $BE^2 = BA.BD = 10(10 + 6) = 160$. Ta có $AE = x$, áp dụng định lí côsin cho tam giác ABE : $BE^2 = x^2 + 100 - 10x$.



Hình 74

Từ đó dẫn đến phương trình

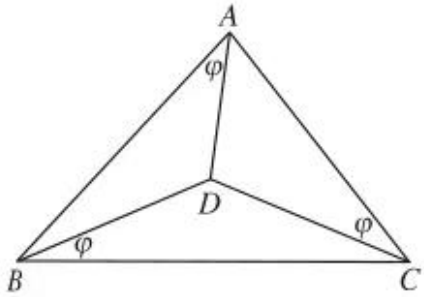
$$x^2 - 10x + 100 = 160$$

hay $x^2 - 10x - 60 = 0$, phương trình này có một nghiệm dương là $x = 5 + \sqrt{85}$. Vậy điểm E cần tìm là điểm trên tia AC và cách A một khoảng bằng $5 + \sqrt{85}$.

88. (h. 75)

a) Theo định lí sin, trong tam giác ABD :

$$\frac{BD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin(B - \varphi)}, \qquad (1)$$



Hình 75

trong tam giác BCD :

$$\frac{CD}{\sin\varphi} = \frac{BD}{\sin(C - \varphi)}, \qquad (2)$$

trong tam giác ACD :

$$\frac{AD}{\sin\varphi} = \frac{CD}{\sin(A - \varphi)}.$$

Từ đó ta có : $\dfrac{AD.BD.CD}{\sin^3\varphi} = \dfrac{AD.BD.CD}{\sin(A - \varphi).\sin(B - \varphi).\sin(C - \varphi)}$.

Suy ra đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng định lí côsin vào tam giác DAB, ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\varphi.$$

Mặt khác, $\frac{1}{2}AB.AD.\sin\varphi = S_{ABD}$.

Từ đó suy ra $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 4S_{DAB}.\cot\varphi$.

Tương tự : $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 4S_{DBC}.\cot\varphi$;

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 4S_{DCA}.\cot\varphi.$$

Cộng theo vế rồi biến đổi với chú ý rằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ bằng diện tích S của tam giác ABC, ta được :

$$\cot\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R.$$

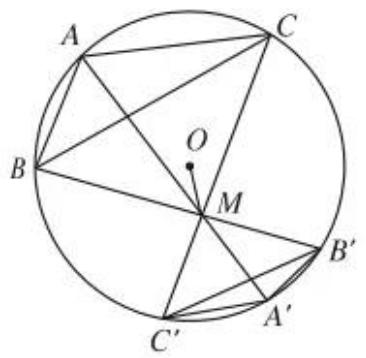
Theo bài 58 (chương II) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}R.$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

89. (h. 76) $S_{A'B'C'} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R}$.

$$S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}.$$

Suy ra $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA}$ (*)



Hình 76

Ta lại có $\Delta MAB \backsim \Delta MB'A'$ nên

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{MA'}{MB} = \frac{MA.MA'}{MA.MB}$$

Do $MA.MA' = \left|\mathscr{P}_{M/(O)}\right| = R^2 - MO^2$

nên $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{R^2 - MO^2}{MA.MB}$.

Tương tự $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{R^2 - MO^2}{MB.MC}$; $\dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{R^2 - MO^2}{MC.MA}$. (**)

Thay (**) vào (*) ta được điều phải chứng minh.

90. (h. 77) a) Kẻ hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại B và C, chúng cắt nhau ở I. Khi đó dễ thấy đường tròn tâm I bán kính $r = IB = IC$ thoả mãn yêu cầu.

b) Kẻ đường thẳng OM, nó cắt đường tròn (I) ở N ($N \neq M$), ta có

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OB^2 \ (= \mathscr{P}_{O/(I)}).$$

Từ đó ta có $\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}) = R^2$,

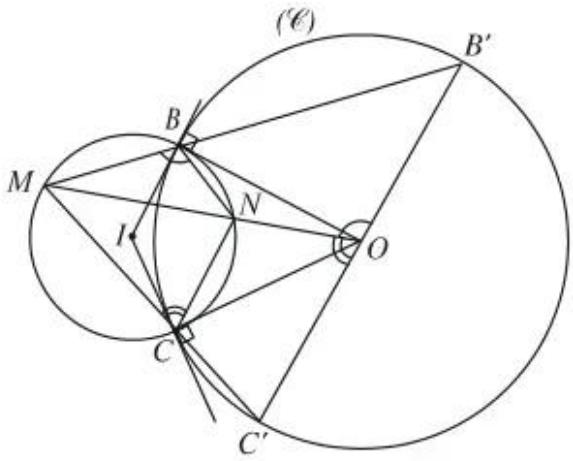
suy ra $OM^2 - \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MN} = R^2$,

hay $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MN} = OM^2 - R^2$

$= \mathscr{P}_{M/(\mathscr{C})} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB'}$.

Vậy N, B, O, B' cùng thuộc một đường tròn, suy ra $\widehat{NOB'} = \widehat{NBM}$.

Tương tự ta có N, C, O, C' cùng thuộc một đường tròn, suy ra $\widehat{NOC'} = \widehat{NCM}$.



Hình 77

Do tứ giác $NBMC$ nội tiếp nên $\widehat{NBM} + \widehat{NCM} = 180^o$.

Từ đó ta có $\widehat{NOB'} + \widehat{NOC'} = 180^o$. Vậy ba điểm O, B', C' thẳng hàng hay $B'C'$ là đường kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

91. (h. 78)

a) Lấy điểm H_1 đối xứng với H qua A' hay $\overrightarrow{A'H} = -\overrightarrow{A'H_1}$.

Khi đó $\widehat{BH_1C} = \widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 180^o - \widehat{A}$.

Suy ra ABH_1C là tứ giác nội tiếp, do đó

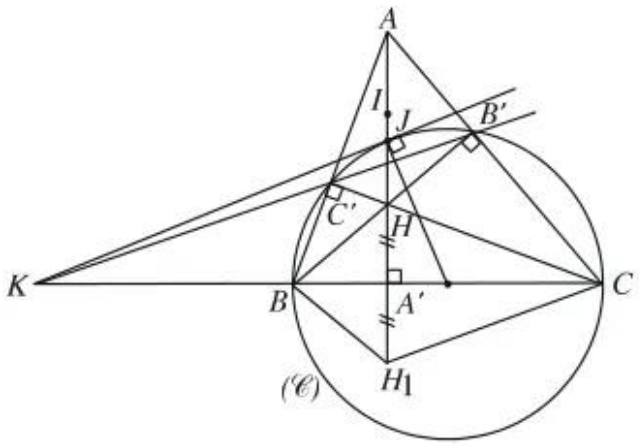
$$\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'H_1}.\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A}.$$

b) Đường tròn $(\mathscr{C})$ và đường tròn tâm I đường kính HA có $B'C'$ là trục đẳng phương. Kẻ tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại J cắt đường thẳng BC ở K thì

$KJ^2 = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KC} = \mathscr{P}_{K/(\mathscr{C})}$.

Ta hãy tính phương tích của K đối với đường tròn tâm I :

$$\mathscr{P}_{K/(I)} = KI^2 - \left(\frac{AH}{2}\right)^2$$



Hình 78

$$= KA'^2 + \overrightarrow{A'I}^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AH}}{2}\right)^2$$

$$= KA'^2 + \left(\frac{\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'H}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{A'H} - \overrightarrow{A'A}}{2}\right)^2$$

$$= KA'^2 + \overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A}$$

Theo câu a), $\overrightarrow{A'H}.\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$. Mặt khác ta có $\widehat{BJC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $JA' \perp BC$ nên $A'J^2 = -\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C}$.

Vậy $\mathscr{P}_{K/(I)} = KA'^2 + A'J^2 = KJ^2 = \mathscr{P}_{K/(\mathscr{C})}$, suy ra K thuộc trục đẳng phương $B'C'$. Vậy ba đường thẳng BC, $B'C'$ và tiếp tuyến tại J của $(\mathscr{C})$ đồng quy ở K.

Các bài tập trắc nghiệm chương II

1. (D)	**2.** (A)	**3.** (A)	**4.** (C)
5. (D)	**6.** (B)	**7.** (C)	**8.** (C)
9. (B)	**10.** (C).		