Bài tập ôn tập chương III

100. a) $AB = \sqrt{(3+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{17}$; $AC = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 + (-1-1)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$;

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2 + (-1-2)^2} = \frac{\sqrt{85}}{2}.$$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = \frac{85}{4} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Các câu b) và c) : Học sinh tự giải.

101. a) Ta có : $D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + 1,$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & -m-1 \\ m-1 & -m^2 \end{vmatrix} = 3m^2 - 1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -m-1 & m+1 \\ -m^2 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + m^2 - m - 1.$$

$D = m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên Δ_1 và Δ_2 luôn cắt nhau và giao điểm K của chúng có toạ độ

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + 1}. \end{cases}$$

b) $K \in Oy \Leftrightarrow \frac{3m^2 - 1}{m^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

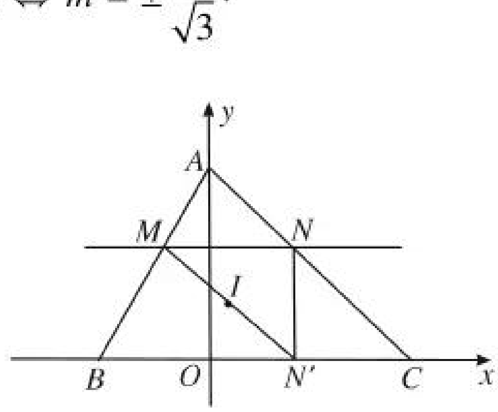
102. (h. 129)

a) Phương trình đường thẳng AB :

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Phương trình đường thẳng AC :

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1.$$



Hình 129

Toạ độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases} \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 \\ y = m \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} x = b - \dfrac{b}{a}m \\ y = m \end{cases}$

hay $M = \left(b - \dfrac{b}{a}m\ ;\ m\right)$.

Toạ độ của điểm N là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{a} = 1 \\ y = m. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} x = c - \dfrac{c}{a}m \\ y = m \end{cases}$ hay $N = \left(c - \dfrac{c}{a}m\ ;\ m\right)$.

b) N' có toạ độ $\left(c - \dfrac{c}{a}m\ ;\ 0\right)$. Giả sử $I = (x_0\ ;\ y_0)$, khi đó ta có :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{b+c}{2} - \dfrac{b+c}{2a}m \\ y_0 = \dfrac{m}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) chứng tỏ I thuộc đường thẳng có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = \dfrac{b+c}{2} - \dfrac{b+c}{2a}m \\ y = \dfrac{m}{2} \end{cases} \quad \text{với } m \text{ là tham số} \qquad (2)$$

Vì các giao điểm M và N chỉ tồn tại khi $0 \le m \le a$ nếu $a \ge 0$, hoặc $0 \ge m \ge a$ nếu $a < 0$, nên tập hợp các điểm I là một đoạn thẳng thuộc đường thẳng (2) ứng với m nằm trong đoạn $[0\ ;\ a]$ nếu $a \ge 0$, hoặc $[a\ ;\ 0]$ nếu $a < 0$.

103. a) $(\mathscr{C})$ có tâm $I(4\ ;\ 3)$, bán kính $R = 2$. Dễ thấy toạ độ của M thoả mãn phương trình của $(\mathscr{C})$ nên M nằm trên $(\mathscr{C})$. Ta cũng viết được phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M là $y - 5 = 0$.

b) Đường tròn $(\mathscr{C}')$ đối xứng với $(\mathscr{C})$ qua đường thẳng $\Delta : y = x$ khi $(\mathscr{C}')$ có bán kính bằng 2 và có tâm I' đối xứng với I qua Δ. Ta tìm được $I' = (3\ ;\ 4)$ và viết được phương trình của $(\mathscr{C}')$ là $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$.

104. (h. 130) Giả sử $T_1 = (x_1 ; y_1)$, $T_2 = (x_2 ; y_2)$. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0 ; 0)$, bán kính R. Phương trình tiếp tuyến MT_1 có dạng $x_1x + y_1y = R^2$ và tiếp tuyến MT_2 có dạng

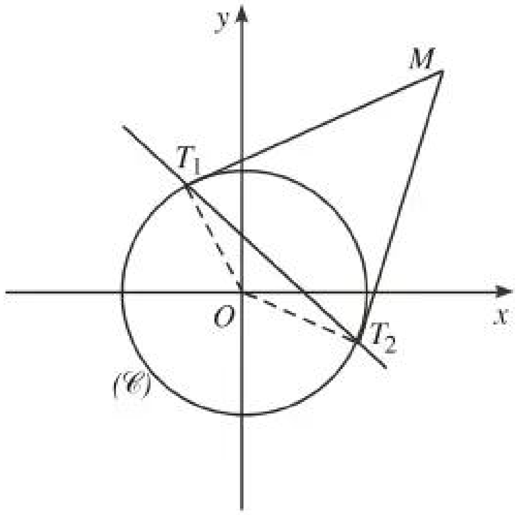
$$x_2x + y_2y = R^2.$$

$$M \in MT_1, M \in MT_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1x_0 + y_1y_0 = R^2 \\ x_2x_0 + y_2y_0 = R^2. \end{cases}$$

Suy ra $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ là các nghiệm của phương trình $x_0x + y_0y = R^2$. (1)

Vì M nằm ngoài $(\mathscr{C})$ nên $x_0^2 + y_0^2 > 0$, do đó (1) là phương trình đường thẳng.

Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là $x_0x + y_0y - R^2 = 0$.



Hình 130

b) • Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng : $x = a$ $\left(|a| > R\right)$. Khi đó $M = (a ; y_0)$ và phương trình T_1T_2 là $ax + y_0y - R^2 = 0$.

Dễ thấy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định $\left(\dfrac{R^2}{a} ; 0\right)$.

• Xét trường hợp đường thẳng d có phương trình dạng $y = kx + m$. Do d không cắt $(\mathscr{C})$ nên $m \neq 0$. Ta có $M = (x_0 ; kx_0 + m)$. Phương trình đường thẳng T_1T_2 là

$$x_0x + (kx_0 + m)y - R^2 = 0 \text{ hay } x_0(x + ky) + my - R^2 = 0.$$

Ta tìm được điểm cố định mà đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua là $\left(\dfrac{-kR^2}{m} ; \dfrac{R^2}{m}\right)$.

105. a) Gọi m, n thứ tự là các khoảng cách từ điểm viễn nhật và điểm cận nhật đến Mặt Trời.

Khi đó tâm sai của quỹ đạo Trái Đất là :

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{(a + c) - (a - c)}{a + c + a - c} = \frac{m - n}{m + n} = \frac{1 - \dfrac{n}{m}}{1 + \dfrac{n}{m}} = \frac{1 - \dfrac{59}{61}}{1 + \dfrac{59}{61}} = \frac{1}{60}.$$

b) Theo câu a), ta có $e = \frac{1}{60} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{60} = \frac{c}{93000000} \Rightarrow c = 1550000$.

Khoảng cách gần nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời là :

$$a - c = 91450000 \text{ (dặm)}.$$

Khoảng cách xa nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời là :

$$a + c = 94550000 \text{ (dặm)}.$$

106. (h. 131)

a) $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$;
$c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

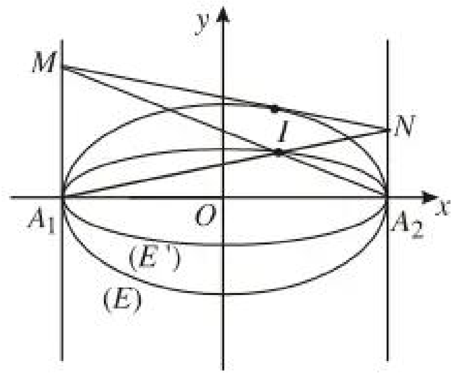
(E) có :

Các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\,;0)$, $F_2(\sqrt{3}\,;0)$.

Các đỉnh $A_1(-2\,;\,0)$, $A_2(2\,;\,0)$,

$B_1(0\,;\,-1)$, $B_2(0\,;\,1)$.

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Hình 131

Các đường chuẩn : $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$.

b) • Phương trình đường thẳng A_1N : $nx - 4y + 2n = 0$.

Phương trình đường thẳng A_2M : $mx + 4y - 2m = 0$.

• Toạ độ giao điểm I là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} nx - 4y + 2n = 0 \\ mx + 4y - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2(m-n)}{m+n} \\ y = \dfrac{mn}{m+n} \end{cases}. \text{ Vậy } I = \left(\frac{2(m-n)}{m+n}\,;\frac{mn}{m+n}\right).$$

c) Phương trình đường thẳng MN : $(n-m)x - 4y + 2(m+n) = 0$.

MN cắt (E) tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} (n-m)x - 4y + 2(m+n) = 0 & (1) \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 & (2) \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm.}$$

(1) $\Rightarrow y = \dfrac{1}{4}[(n-m)x + 2(m+n)]$, thay y vào (2) ta được :

$$x^2 + 4.\frac{1}{16}[(n-m)x + 2(m+n)]^2 = 4$$

$\Leftrightarrow [(n-m)^2 + 4]x^2 + 4(n^2 - m^2)x + 4(m+n)^2 - 16 = 0.$ (3)

(3) có một nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 0$ hay

$$4(n^2 - m^2)^2 - [(n-m)^2 + 4].[4(n+m)^2 - 16] = 0$$

$\Leftrightarrow mn = 1.$ (4)

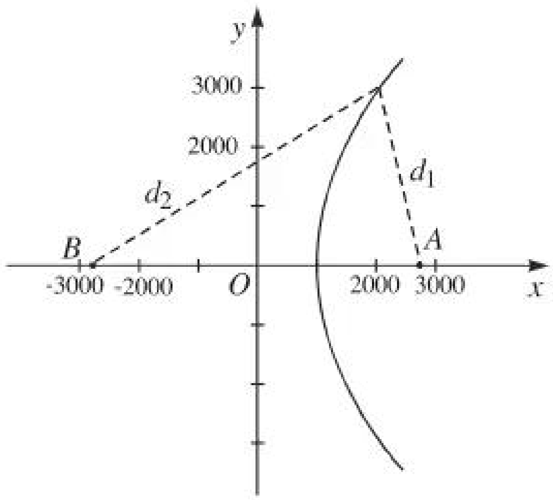
Suy ra toạ độ của I là $\begin{cases} x = \dfrac{2(m-n)}{m+n} & (5) \\ y = \dfrac{mn}{m+n} = \dfrac{1}{m+n}. & (6) \end{cases}$

(5) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{(m-n)^2}{(m+n)^2} = \dfrac{m^2 - 2mn + n^2}{(m+n)^2}$

(6) $\Rightarrow 4y^2 = \dfrac{4mn}{(m+n)^2}$. Do đó $\dfrac{x^2}{4} + 4y^2 = 1$. Vậy tập hợp các giao điểm I là elip (E') có phương trình : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$

107. Chọn hệ trục toạ độ Oxy mà Ox đi qua A và B, Oy là đường trung trực của AB như hình 132a. Kí hiệu d_1 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị A, d_2 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị B, d_1 và d_2 tính theo feet. Khi đó, do thiết bị A nhận âm thanh nhanh hơn thiết bị B 2 giây nên ta có :

$$d_2 - d_1 = 2200. \quad (1)$$



Hình 132a

Các điểm thoả mãn (1) nằm trên một nhánh của hypebol có phương trình :

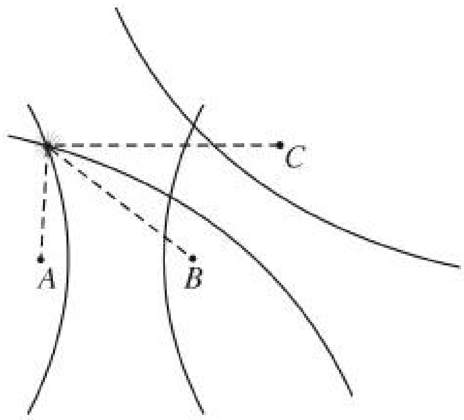
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta có : $c = \frac{5280}{2} = 2640$, $a = \frac{2200}{2} = 1100$,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5759600.$$

Vậy vụ nổ nằm trên một nhánh của hypebol có phương trình :

$$\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1.$$



Hình 132b

Nhận xét. Trên đây ta chỉ xác định được một nhánh của hypebol mà trên đó vụ nổ xảy ra, nhưng không biết chính xác vụ nổ xảy ra ở đâu. Tuy nhiên, nếu ta dùng một thiết bị thứ ba C để ghi âm vụ nổ thì ta sẽ xác định được một nhánh của hypebol thứ hai với tiêu điểm là B và C (hoặc A và C). Khi đó vị trí của vụ nổ được xác định tại điểm mà hai nhánh trên cắt nhau (h. 132b).

108. (h. 133)

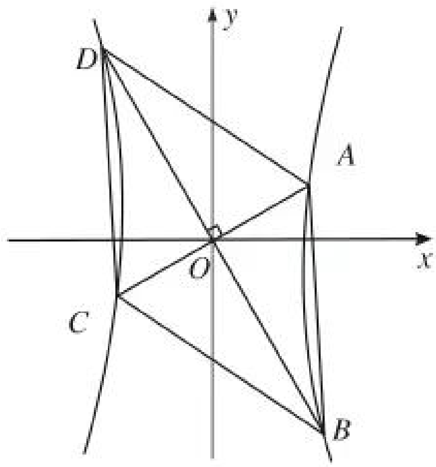
a) $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$,

$c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Vậy (H) có các tiêu điểm : $F_1 = (-\sqrt{13}\,; 0)$,

$F_2 = (\sqrt{13}\,; 0)$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

các đường tiệm cận : $y = \pm\frac{bx}{a} = \pm\frac{3}{2}x$, các đường chuẩn : $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$.



Hình 133

b) Từ giả thiết suy ra $\Delta : y = kx$, $\Delta' : y = -\frac{1}{k}x$.

• Hoành độ giao điểm của Δ và (H) là nghiệm của phương trình :

$$9x^2 - 4k^2x^2 = 36 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36. \quad (1)$$

• Tung độ giao điểm của Δ' và (H) là nghiệm của phương trình :

$$9k^2y^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)y^2 = 36. \quad (2)$$

Δ cắt (H) khi và chỉ khi (1) có nghiệm, hay $9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < k < \dfrac{3}{2}.$

Δ' cắt (H) khi và chỉ khi (2) có nghiệm, hay $9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \dfrac{2}{3} \\ k < -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) khi và chỉ khi $\begin{cases} -\dfrac{3}{2} < k < \dfrac{3}{2} \\ k < -\dfrac{2}{3} \text{ hoặc } k > \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{3}{2} < k < -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} < k < \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

c) Gọi A và C là các giao điểm của Δ và (H) $(x_A > 0)$; B và D là các giao điểm của Δ' và (H) $(y_B < 0)$.

Do (H) nhận O làm tâm đối xứng, nên $OA = OC$, $OB = OD$, do đó $ABCD$ là hình bình hành. Lại có AC vuông góc với BD nên $ABCD$ là hình thoi.

Giải hệ các phương trình của Δ và (H) : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases}$

ta được $A = \left(\dfrac{6}{\sqrt{9 - 4k^2}} ; \dfrac{6k}{\sqrt{9 - 4k^2}}\right).$

Giải hệ các phương trình của Δ' và (H) : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = -\dfrac{1}{k}x \end{cases}$

ta được $B = \left(\dfrac{6k}{\sqrt{9k^2 - 4}} ; \dfrac{-6}{\sqrt{9k^2 - 4}}\right).$

Ta có $S_{ABCD} = 4S_{OAB} = 2OA.OB.$

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{36(k^2 + 1)}{9 - 4k^2} \Rightarrow OA = \frac{6\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{4k^2 - 4}}.$$

$$OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = \frac{36(k^2 + 1)}{9k^2 - 4} \Rightarrow OB = \frac{6\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{9k^2 - 4}}.$$

Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$.

d) Ta có : $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{9-4k^2+9k^2-4}{36(1+k^2)} = \dfrac{5}{36}$.

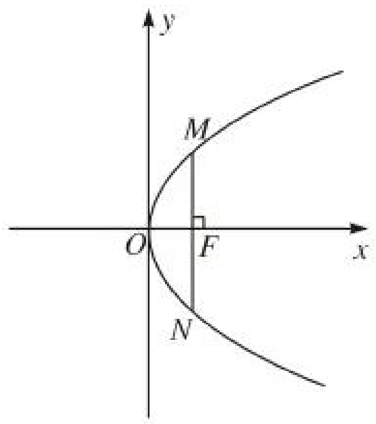
Vậy $\dfrac{1}{OA^2} \cdot \dfrac{1}{OB^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow OA = OB$.

Mà $\dfrac{1}{OA^2} \cdot \dfrac{1}{OB^2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow OA.OB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{ABCD}$ nhỏ nhất.

Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 9 - 4k^2 = 9k^2 - 4 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Vậy diện tích hình thoi $ABCD$ nhỏ nhất khi các đường thẳng Δ và Δ' là các đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ hai.

109. a) (h. 134) Gọi M, N là các giao điểm của (P) và đường thẳng vuông góc với Ox tại F. Khi đó, toạ độ của M, N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y^2 = 2px. \end{cases}$



Hình 134

Hệ có hai nghiệm là $\left(\dfrac{p}{2}; p\right), \left(\dfrac{p}{2}; -p\right)$.

Vậy $MN = |y_M| + |y_N| = 2p$.

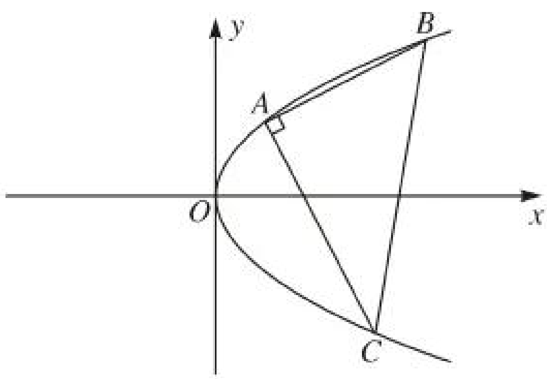
b) (h. 135) Giả sử $A = \left(\dfrac{a^2}{2p};\ a\right)$, $B = \left(\dfrac{b^2}{2p};\ b\right)$, $C = \left(\dfrac{c^2}{2p};\ c\right)$.

Phương trình đường thẳng BC là

$$2px - (b+c)y + bc = 0. \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{b^2 - a^2}{2p};\ b - a\right),$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{c^2 - a^2}{2p};\ c - a\right).$$



Hình 135

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) + 4p^2(b-a)(c-a) = 0$

$\Leftrightarrow (b+a)\,(c+a) + 4p^2 = 0 \Leftrightarrow bc + a(b+c) + a^2 + 4p^2 = 0.$ (2)

Rút bc từ (2) và thay vào (1), ta được phương trình của BC là

$$2px - a^2 - 4p^2 - (b+c)(y+a) = 0 \qquad (3)$$

Dễ thấy đường thẳng BC có dạng (3) luôn đi qua điểm cố định $M\left(\dfrac{a^2}{2p} + 2p\ ;- a\right)$.

Bài tập trắc nghiệm chương III

1. (C)	**2.** (B)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (D)
6. (D)	**7.** (A)	**8.** (D)	**9.** (C)	**10.** (A)
11. (B)	**12.** a) (D), b) (C)	**13.** (C)	**14.** (B)	**15.** (C)
16. (D)	**17.** (A)	**18.** (B)	**19.** (D)	**20.** (A)
21. (D)	**22.** (C)	**23.** (B)	**24.** (C)	**25.** (B)
26. (B)	**27.** (A).			