§4. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

• Trong tam giác, đường trung tuyến nối một đỉnh với trung điểm của cạnh đối diện đỉnh đó.

• Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó được gọi là trọng tâm của tam giác và nó cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

B. Câu hỏi

Câu 8. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM. Gọi G là trọng tâm của tam giác đó. Khoanh tròn vào chữ cái trước khẳng định đúng.

(A) $\frac{MG}{AG} = \frac{1}{2}$; (B) $\frac{MG}{AG} = \frac{2}{3}$;

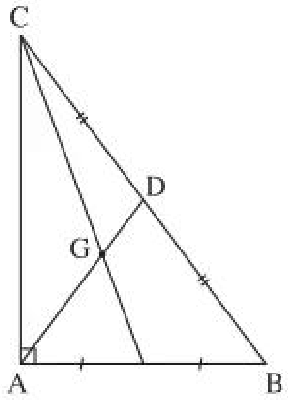
(C) $\frac{MG}{AG} = \frac{3}{4}$; (D) $\frac{MG}{AG} = 1$.

Câu 9. Với các giả thiết cho trong câu 8, hãy điền vào các chỗ trống dưới đây để được khẳng định đúng :

$\frac{AG}{AM} =$ .... ; $\frac{AG}{GM} =$ .... ;

$\frac{GM}{AM} =$ .... ; $\frac{GM}{AG} =$ ....

C. Giải bài tập



Hình 22

Bài 23 [25]. Biết rằng : Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền. Hãy giải bài toán sau :

Cho tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông AB = 3cm, AC = 4cm (h.22). Tính khoảng cách từ đỉnh A tới trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Theo định lí về .... , ta có

AG = ... AD (1)

Theo giả thiết ta có AD = ... BC.

Mặt khác, áp dụng .... vào .... , ta có

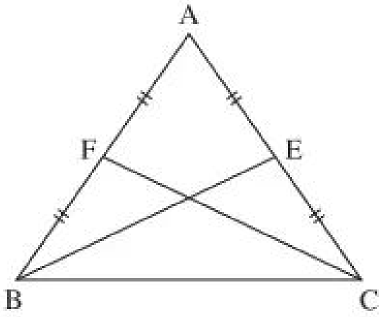
$BC = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (cm)

Vậy AD = ... (cm), do đó AG = ... (cm).

Bài 24 [26]. Chứng minh định lí : Trong một tam giác cân, hai đường trung tuyến ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau.

Giải. (h. 23)

GT	Δ ABC, ...
KL	....



Hình 23

Xét hai tam giác ABE và ACF.

Ta có : .... = ... (gt), góc .... chung,

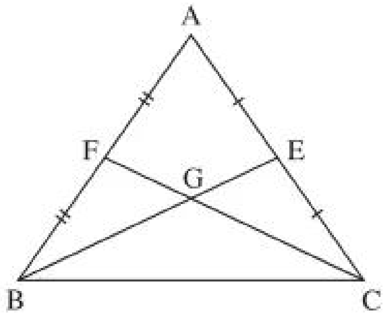
$$.......... = \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2} = ...$$

Vậy .... , suy ra ....

Bài 25 [27]. Hãy chứng minh định lí đảo của định lí trên : Nếu tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó cân.

Giải. (h.24)

GT	Δ ABC, AE = CE AF = BF, BE = CF
KL	AB = AC



Hình 24

Giả sử G là giao điểm của .... (G là .... tam giác ABC). Theo .... , ta có

BG = ... GE, CG = ... GF.

Mặt khác, theo giả thiết, ta có

GE = ... BE = ... = CF = GF.

Suy ra BG .... CG.

Xét hai tam giác BFG và CEG. Theo chứng minh trên, ta có .... = ..., ... = ... Mặt khác .... = ... (hai góc đối đỉnh).

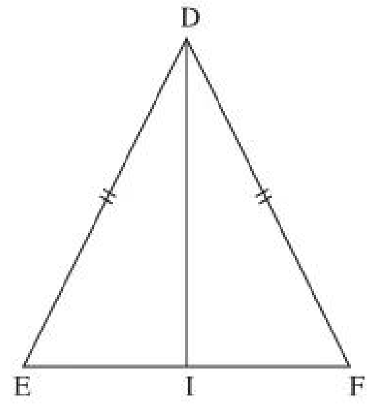
Vậy .... , suy ra BF .... CE, do đó AB = ... BF = ... CE = AC, hay tam giác ABC ....

Bài 26 [28]. Cho tam giác DEF cân tại D với đường trung tuyến DI (h.25).

a) Chứng minh ΔDEI = ΔDFI ;

b) Các góc DIE và DIF là những góc gì ?

c) Biết DE = DF = 13cm, EF = 10cm, hãy tính độ dài đường trung tuyến DI.



Hình 25

Giải

a) Xét hai tam giác .... Theo giả thiết, ta có .... = ... và .... = ... Hơn nữa, ... Vậy .... (c.c.c).

b) Theo câu a, ΔDEI = ΔDFI, suy ra .... = ... Mặt khác

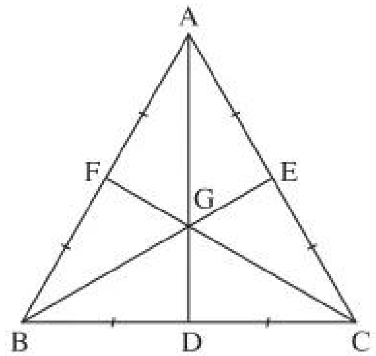
.... + ... = ..., do đó ....

c) Ta có tam giác .... vuông tại .... (câu b) Theo .... , ta có DI = ...

Mặt khác, vì I là trung điểm của EF nên .... (cm).

Vậy DI = ... = ... (cm).

Bài 27 [29]. Cho G là trọng tâm của tam giác đều ABC. Chứng minh rằng GA = GB = GC (h. 26).



Hình 26

Giải

Gọi .... là AD, BE, CF.

Tam giác ABC đều nên nó cân tại A, do đó ta có BE .... CF (1).

Tam giác đều ABC cũng cân tại B, do đó ta có AD .... CF (2)

Từ (1) và (2) suy ra .... (3). Mặt khác, do G là .... nên ta còn có

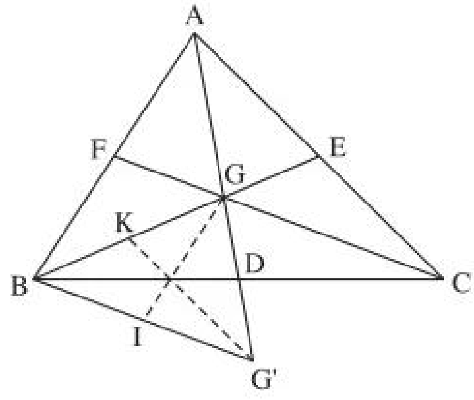
AG = ..., BG = ..., CG = ...

Vậy từ (3) suy ra ....

Bài 28 [30]. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Trên tia AG lấy điểm G' sao cho G là trung điểm của AG' (h.27).

a) So sánh các cạnh của tam giác BGG' với các đường trung tuyến của tam giác ABC.

b) So sánh các đường trung tuyến của tam giác BGG' với các cạnh của tam giác ABC.



Hình 27

Giải

a) So sánh các cạnh của tam giác BGG' với ....
Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có :

BG = ..., CG = ..., AG = ...

Mặt khác, do G là trung điểm của AG' nên GG' = ... = ... AD.
Ta còn có ΔBDG' = ... (c.g.c), suy ra BG' = ... = ... CF.
Tóm lại ta có

GG' = ... AD ; BG = ... BE ; BG' = ... CF.

b) So sánh các đường trung tuyến BD, GI, G'K của tam giác BGG' với .... Ta có BD = ... BC (vì ....)

Hai tam giác AEG và G'KG có AG = ... vì ...., GK = ... vì .... và $\widehat{AGE}$ = ...
(..................................). Vậy ΔAEG = ΔG'GK, do đó

G'K = ... = ... AC

(vì ....).

Hai tam giác BDG' và CDG bằng nhau .... nên ta có $\widehat{G'BD}$ = ... , suy ra .... , do đó $\widehat{FGB}$ = ... (so le trong). Hơn nữa, BG' = ... (= .... CF) suy ra BI = ... = ... = GF.

Vậy ΔBFG = ΔGIB .... , suy ra GI = ... = ... AB.

Tóm lại BD = ... BC ; GI = ... AB, G'K = ... AC.