§9. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

• Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này được gọi là trực tâm của tam giác đó.

• Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường (đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao cùng xuất phát từ một đỉnh và đường trung trực của cạnh đối diện của đỉnh này) trùng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

• Trong tam giác đều, bốn điểm : trọng tâm, trực tâm, điểm cách đều ba đỉnh, điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh, trùng nhau.

B. Câu hỏi

Hãy điền vào chỗ trống trong các khẳng định dưới đây để được khẳng định đúng.

Câu 18. Gọi AM và AH lần lượt là đường trung tuyến và đường cao của tam giác ABC.

(A) Nếu AM ≡ AH thì tam giác ABC là ....

(B) Nếu tam giác ABC là .... thì AM ≡ AH.

Câu 19. Gọi G và I lần lượt là trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC.

(A) Nếu G ≡ I thì tam giác ABC là ....

(B) Nếu tam giác ABC .... thì G ≡ I.

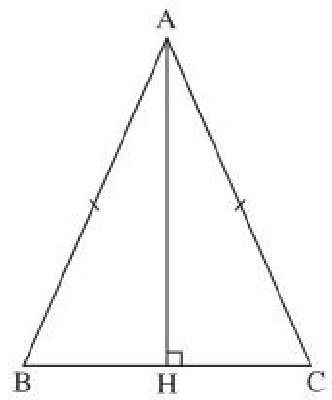
C. Giải bài tập

Bài 54. Chứng minh rằng trong một tam giác cân, đường cao xuất phát từ đỉnh đối diện với đáy đồng thời là đường phân giác cùng xuất phát từ đỉnh này.

Giải. (h.50)

Giả sử tam giác ABC cân tại A và AH là một đường cao của nó. Ta sẽ chứng minh là ....

....



Hình 50

Xét hai tam giác vuông ....

....

Ta có .... = ..., cạnh ....

Vậy .... = ... (cạnh huyền – cạnh góc vuông). Suy ra ....

..................................,do đó AH là ....

....

Bài 55. Cho tam giác DEF vuông tại D. Hãy tìm trực tâm của tam giác DEF. (Bài này là một phần của bài [58]).

Giải. (h.51)

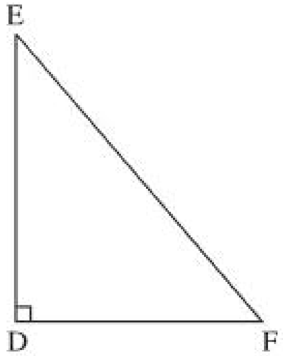
Trong tam giác DEF vuông tại D thì hai đường cao xuất phát từ E và F của tam giác DEF lần lượt là .... Vì vậy, D là giao điểm của ....

....

Do ....

.... đồng quy nên D cũng là .... hay D là ....

....

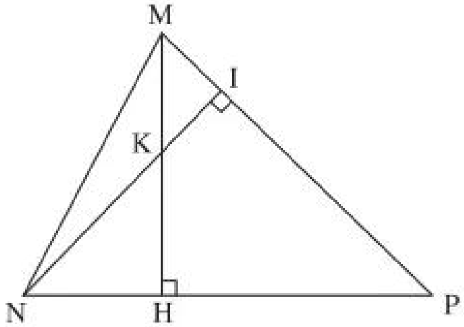


Hình 51

Bài 56 [59]. Cho tam giác nhọn MNP. Hai đường cao MH, NI cắt nhau tại K (h.52).

a) Chứng minh $PK \perp MN$.

b) Khi $\widehat{MPN} = 50^o$. Hãy tính góc NKH.



Hình 52

Giải

a) Do ba đường cao của .... một điểm nên đường cao thứ ba của tam giác .... giao điểm của .... Vậy .... xuất phát từ P của tam giác MNP phải đi qua .... của .... xuất phát từ M và N, hay ....

b) Trong tam giác vuông MHP, ta có

$$\text{.................} + \text{.................} = 90^o \qquad (1)$$

Trong tam giác vuông KIM, ta có

$$\text{.................} + \text{.................} = 90^o \qquad (2)$$

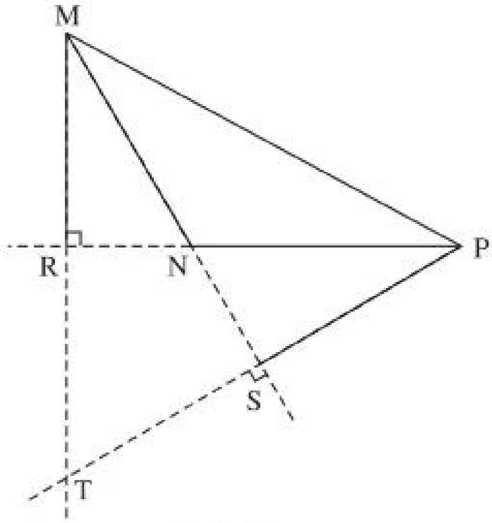
Từ (1) và (2) suy ra .... = ..., mà .... = $\widehat{NKH}$ (hai góc ....) nên $\widehat{MPN}$ = ...

Khi $\widehat{MPN} = 50^o$ thì $\widehat{NKH}$ = ...

Bài 57. Hãy giải thích tại sao trực tâm của tam giác tù nằm ở bên ngoài tam giác. (Bài này là một phần của bài [58])

Giải : (h.53)

Trực tâm của tam giác tù nằm ở bên ngoài của tam giác vì .... xuất phát từ .... nằm ở .... tam giác nên .... của chúng (tức là .... của tam giác) cũng nằm ....



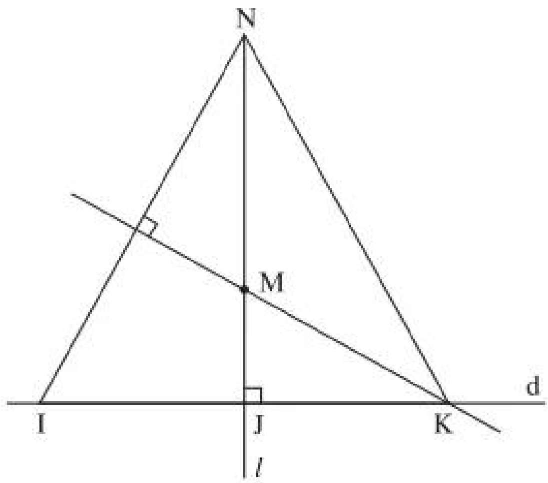
Hình 53

Chẳng hạn, trong hình bên, hai đường cao .... đỉnh góc nhọn nằm .... tam giác tù MNP nên .... T của tam giác cũng ....

Bài 58 [60]. Trên đường thẳng d, lấy ba điểm phân biệt I, J, K (J ở giữa I và K). Kẻ đường thẳng *l* vuông góc với d tại J. Trên *l* lấy điểm M khác với điểm J. Đường thẳng qua I vuông góc với MK cắt *l* tại N. Chứng minh rằng KN ⊥ IM.

Giải. (h.54)

Xét tam giác IKN. Do .... ⊥ ...., ... ⊥ .... nên .... và .... là hai đường cao .... Hai đường cao này .... nên M là ....



Hình 54

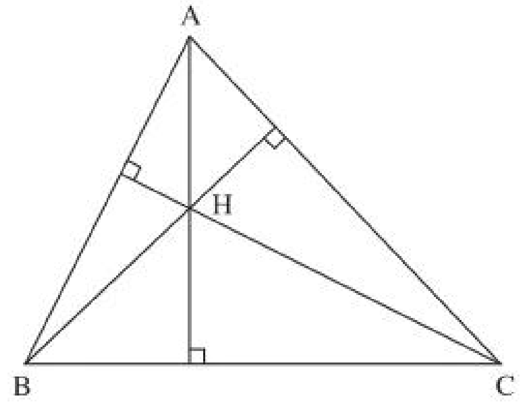
Do đó, theo tính chất ...., ... là .... thứ ba của tam giác đó, hay .... ⊥ ....

Bài 59 [61]. Cho tam giác ABC không vuông. Gọi H là trực tâm của nó.

a) Hãy chỉ ra các đường cao của tam giác HBC. Từ đó hãy chỉ ra trực tâm của tam giác đó.

b) Tương tự, hãy lần lượt chỉ ra trực tâm của các tam giác HAB và HAC.

Giải. (h.55)



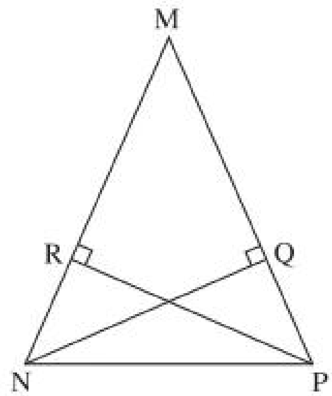
Hình 55

a) Tam giác HBC có .... ⊥ HC, ... HB nên .... và .... là hai đường cao xuất phát từ đỉnh .... và đỉnh .... của tam giác đó. Vậy .... là trực tâm của tam giác HBC.

b) Tương tự, ... và .... lần lượt là trực tâm của các tam giác HAC và HAB.

Bài 60 [62]. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân. Từ đó, suy ra tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Giải. (h.56)



Hình 56

Giả sử tam giác MNP có hai góc nhọn là $\widehat{N}$ và $\widehat{P}$; hai đường cao NQ và PR bằng nhau. Ta sẽ chứng minh tam giác .... cân tại ....

Vì góc N nhọn nên chân đường cao xuất phát từ đỉnh P là điểm .... thuộc .... (R ở giữa .... và ....). Tương tự, Q ở giữa .... và ....

Hai tam giác vuông .... và .... có góc ...., ... (giả thiết) nên Δ .... = Δ .... , suy ra ...., hay tam giác MNP cân tại M.

Theo chứng minh trên, tam giác có .... bằng nhau thì nó sẽ lần lượt .... tại cả .... Do đó, tam giác .... là một tam giác đều.