§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. MỤC ĐÍCH

1. Phải biết cách lập các loại phương trình của đường thẳng khi biết các yếu tố đủ để xác định đường thẳng đó, chú trọng đến hai loại :

– Phương trình tham số ;

– Phương trình tổng quát.

2. Nắm vững cách vẽ đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ khi biết phương trình của đường thẳng đó.

3. Từ phương trình của hai đường thẳng, học sinh phải xác định được vị trí tương đối và tính được góc giữa hai đường thẳng đó.

4. Tính được khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

B. NỘI DUNG

1. Mục đích của hoạt động 1 là nhằm xây dựng khái niệm vectơ chỉ phương của đường thẳng theo các bước :

– Từ phương trình bậc nhất $y = \frac{1}{2}x$ quen thuộc học sinh xác định được toạ độ của hai điểm M_0, M trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

– Để chứng tỏ $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với vectơ $\vec{u} = (2 ; 1)$ có thể thực hiện như sau :

+ Tính toạ độ $\overrightarrow{M_0M} = (4 ; 2)$;

+ Ta có $\overrightarrow{M_0M} = 2\vec{u}$ vậy hai vectơ $\overrightarrow{M_0M}$ và $\vec{u}$ cùng phương.

2. Khái niệm vectơ chỉ phương được giới thiệu thông qua khái niệm hai vectơ cùng phương đã biết, trong khi đó để định nghĩa vectơ pháp tuyến phải dùng đến quan hệ vuông góc. Do đó sách giáo khoa theo chương trình chuẩn đã trình bày phương trình tham số trước khi giới thiệu phương trình tổng quát của đường thẳng. Điều này cũng nhất quán với trường hợp phương trình đường thẳng trong không gian : trong chương trình chuẩn lớp 12 chỉ yêu cầu giới thiệu phương trình tham số của đường thẳng chứ không nêu phương trình tổng quát.

Hơn nữa, về mặt lí thuyết, vectơ chỉ phương đã có trước trong không gian afin, còn vectơ pháp tuyến được xuất hiện sau, khi có không gian Ơclit.

3. Nếu $u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0$, phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$

có thể được chuyển sang phương trình chính tắc :

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

và phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ với hệ số góc k :

$$y - y_0 = \frac{u_2}{u_1}(x - x_0)$$

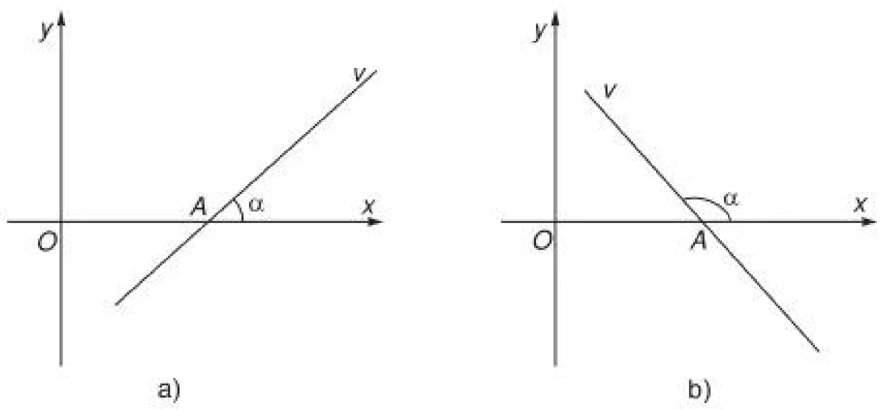
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Muốn vẽ đường thẳng khi cho biết phương trình tham số, về nguyên tắc ta cần xác định hai điểm ứng với hai giá trị t khác nhau.

Tuy nhiên theo phương trình, ta đã có điểm (x_0 ; y_0) thuộc đường thẳng ứng với giá trị $t = 0$, nên chỉ cần lấy một điểm nữa ứng với $t \neq 0$.

Khi thực hiện hoạt động 2, học sinh có thể tìm các điểm thuộc đường thẳng ứng với các giá trị t khác nhau. Tuy nhiên cuối cùng giáo viên nên chỉ cho học sinh thấy trong phương trình đó đã có ngay một điểm thuộc đường thẳng, đó là điểm (5 ; 2) (ứng với $t = 0$) và một vectơ chỉ phương, đó là vectơ $\vec{u} = (-6 ; 8)$.

4. Khái niệm hệ số góc của đường thẳng học sinh đã được học ở lớp 9, trong SGK Hình học lớp 10 có thiết lập mối liên hệ giữa hệ số góc với vectơ chỉ phương và góc của hai tia Ax, Av (h.3.4).



$$k = \tan \widehat{xAv} = \frac{u_2}{u_1}$$

Hình 3.4

+ *Chú ý.* Ta đã biết góc hợp bởi hai đường thẳng là góc nhỏ nhất trong bốn góc tạo bởi hai đường thẳng đó, nên hệ số góc ở đây không phải là tang của góc tạo bởi hai đường thẳng đó, mà là tang của góc giữa tia Ax và tia Av của đường thẳng Δ thuộc nửa mặt phẳng toạ độ ứng với $y > 0$.

5. Mục liên hệ giữa vectơ chỉ phương và hệ số góc :

Hoạt động 3 và ví dụ tiếp theo nhằm củng cố mối liên hệ giữa vectơ chỉ phương, hệ số góc và phương trình tham số của một đường thẳng.

Đồng thời giáo viên có thể khai thác thêm mối liên hệ giữa các dạng phương trình của đường thẳng :

- $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$;
- $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ $(u_1 \neq 0, u_2 \neq 0)$;
- $y - y_0 = k(x - x_0)$;
- $y = ax + b$.

6. Hoạt động 4 chuẩn bị cho việc đưa ra khái niệm vectơ pháp tuyến của đường thẳng dựa vào vectơ chỉ phương đã biết :

Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2\ ;\ 3)$ thì vectơ pháp tuyến của nó là $\vec{n} = (3\ ;\ -2)$. Vì $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên Δ vuông góc với giá của vectơ $\vec{n}$.

7. Một đường thẳng được xác định nếu biết một điểm $(x_0\ ;\ y_0)$ và một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\ ;\ b)$ của nó, điều này được cụ thể hoá bằng công thức :

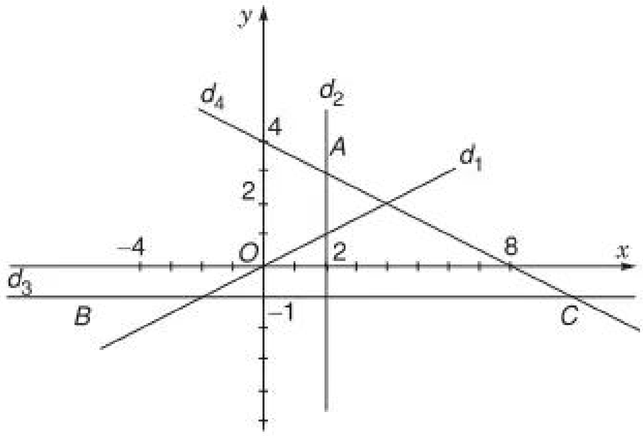
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

8. Hai hoạt động 5 và 6 nhằm giúp học sinh biết tìm vectơ pháp tuyến và vectơ chỉ phương khi biết phương trình tổng quát của đường thẳng.

Tuỳ đối tượng học sinh, giáo viên có thể hướng dẫn cho các em viết phương trình tham số khi biết phương trình tổng quát của đường thẳng.

9. Hoạt động 7 giúp học sinh hiểu một cách trực quan các dạng phương trình đường thẳng.

Các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 được thể hiện trên h.3.5.



Hình 3.5

10. Học sinh đã biết giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Căn cứ vào nghiệm của hệ phương trình này ta suy ra vị trí tương đối của hai đường thẳng. Như vậy ta đã chuyển tư duy hình học sang tư duy đại số và tập cho học sinh làm quen với loại tư duy mới này.

11. Tương tự mục vị trí tương đối của hai đường thẳng, ta cũng dùng công cụ đại số để xác định góc giữa hai đường thẳng và khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

(Để tiện lợi trong việc giải bài tập chúng ta kí hiệu $\overrightarrow{u_\Delta}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ, $\overrightarrow{n_\Delta}$ là vectơ pháp tuyến của Δ và k_Δ là hệ số góc của Δ.)

1. a) Ta có $M(2\ ;\ 1)$, $\vec{a} = (3\ ;\ 4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t. \end{cases}$$

b) Ta có $M(-2\ ;\ 3)$, $\vec{n} = (5\ ;\ 1)$.

$d \perp \vec{n}$, suy ra $\overrightarrow{u_d} = (1\ ;\ -5)$.

Vậy phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 5t. \end{cases}$$

2. a) Ta có $M(-5 ; -8)$, $k_\Delta = -3$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{u_\Delta} = (1 ; -3)$$

Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = -8 - 3t. \end{cases}$$

Khử tham số t ta được phương trình tổng quát của Δ là

$$3x + y = -23$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + y + 23 = 0.$$

\+ ***Chú ý.*** Có thể dùng công thức $y - y_0 = k(x - x_0)$ để lập phương trình của đường thẳng Δ.

b) Ta có $A(2 ; 1)$, $B(-4 ; 5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-6 ; 4)$$

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-3 ; 2).$$

Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$$

Khử tham số t ta được phương trình tổng quát của Δ là

$$2x + 3y = 7$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 3y - 7 = 0.$$

3. Ta có $A(1 ; 4)$, $B(3 ; -1)$, $C(6 ; 2)$.

a) $AB : 5x + 2y - 13 = 0$

$BC : x - y - 4 = 0$

$CA : 2x + 5y - 22 = 0.$

b) Ta có $AH \perp BC \Rightarrow AH : x + y + C = 0$

$$A \in AH \Rightarrow 1 + 4 + C = 0$$
$$\Rightarrow C = -5.$$

Vậy ta có phương trình đường cao AH là $x + y - 5 = 0$.

Ta có toạ độ trung điểm M của BC là $M\left(\frac{9}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. Trung tuyến AM có phương trình

$$\frac{7}{2}x + \frac{7}{2}y - \frac{35}{2} = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

4. Phương trình đường thẳng qua hai điểm $M(4 ; 0)$ và $N(0 ; -1)$ là

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} = 1 \Leftrightarrow -x + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 4 = 0.$$

5. a) Hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 10y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$

có nghiệm $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy d_1 cắt d_2.

\+ ***Chú ý.*** Ta có thể suy ra d_1 cắt d_2 do hai vectơ chỉ phương của chúng không cùng phương.

b) Ta có $d_1 : 12x - 6y + 10 = 0,$

$$d_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t, \end{cases}$$

đưa về phương trình tổng quát ta được

$$d_2 : 2x - y - 7 = 0,$$

Hệ phương trình $\begin{cases} 12x - 6y + 10 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $d_1 \parallel d_2$.

c) Ta có $d_1 : 8x + 10y - 12 = 0,$ (1)

$d_2 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t, \end{cases}$ đưa về phương trình tổng quát, ta được

$d_2 : 4x + 5y - 6 = 0,$ (2)

Hai phương trình (1) và (2) có hệ số tỉ lệ : $\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{-12}{-6}$.

Suy ra hệ phương trình $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ vô số nghiệm.

Vậy $d_1 \equiv d_2$.

6. Ta có $M(2 + 2t ; 3 + t) \in d$ và $AM = 5$, như vậy

$$AM^2 = 25 \Leftrightarrow (2+2t)^2 + (2+t)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{17}{5}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thoả mãn đề bài là :

$$M_1(4 ; 4),\ M_2\left(-\frac{24}{5} ; -\frac{2}{5}\right).$$

7. Ta có $d_1 : 4x - 2y + 6 = 0$

$d_2 : x - 3y + 1 = 0.$

Gọi φ là góc giữa d_1 và d_2, ta có :

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|4+6|}{\sqrt{16+4}.\sqrt{1+9}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{20}.\sqrt{10}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\varphi = 45^{\circ}$.

8. a) Ta có $A(3\,;\,5)$

$\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$

$$d(A, \Delta) = \frac{|4(3)+3(5)+1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{28}{5}.$$

b) Ta có $B(1\,;\,-2)$

$d : 3x - 4y - 26 = 0$

$$d(B, d) = \frac{|3(1)-4(-2)-26|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3.$$

c) Ta có $C(1\,;\,2)$

$m : 3x + 4y - 11 = 0$

$$d(C, m) = \frac{|3(1)+4(2)-11|}{\sqrt{9+16}} = 0.$$

9. Ta có $C(-2\,;\,-2)$

$\Delta : 5x + 12y - 10 = 0.$

$$R = d(C, \Delta) = \frac{|5(-2)+12(-2)-10|}{\sqrt{25+144}} = \frac{44}{13}.$$

Vậy $R = \dfrac{44}{13}.$

D. THAM KHẢO (NHỮNG KIẾN THỨC BỔ SUNG)

1. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng bằng cách dùng định thức cấp hai. Xét hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình tổng quát

$$\Delta_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$\Delta_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Giả sử Δ_1 và Δ_2 có điểm chung là $M(x\,;\,y)$, khi đó $(x\,;\,y)$ là nghiệm của hệ

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Theo cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta đặt :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = c_1a_2 - c_2a_1.$$

Ta có các trường hợp sau :

a) $D \neq 0$

Hệ (I) có 1 nghiệm $\begin{cases} x_0 = \dfrac{D_x}{D} \\ y_0 = \dfrac{D_y}{D}. \end{cases}$

Vậy Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$.

b) $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \text{ hay } D_y \neq 0. \end{cases}$

Hệ (I) vô nghiệm.

Vậy $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

c) $D = D_x = D_y = 0$

Hệ (I) có vô số nghiệm.

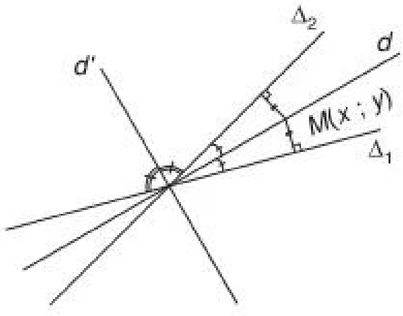
Vậy $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

2. Phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau và có phương trình là

$\Delta_1 :\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$\Delta_2 :\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$



Hình 3.6

Để lập phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 ta thực hiện các bước sau :

– Xét điểm $M(x\ ;\ y)$ tuỳ ý trong mặt phẳng toạ độ ;

– M thuộc phân giác của góc giữa Δ_1 và Δ_2

$$\Leftrightarrow d(M,\Delta_1) = d(M,\Delta_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

– Vậy phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$