§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. MỤC ĐÍCH

1. Lập được phương trình của đường tròn khi biết toạ độ của tâm và bán kính.

2. Nhận dạng được phương trình của đường tròn và tìm được toạ độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

3. Lập được phương trình tiếp tuyến của đường tròn khi biết toạ độ tâm đường tròn và toạ độ tiếp điểm.

B. NỘI DUNG

1. Hoạt động 1 được thiết kế với mục đích vận dụng cách viết phương trình đường tròn

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

thông qua việc xác định toạ độ tâm $I(a\,;\,b)$ và tính bán kính R.

SGK chỉ trình bày phương trình đường tròn dưới dạng (1). Khi khai triển dạng này ta được phương trình

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ với } c=a^2+b^2=R^2.$$

Đối với chương trình Giáo dục Trung học phổ thông SGK Hình học 10 không trình bày phương trình đường tròn dưới dạng tổng quát.

2. Hoạt động 2 nhằm mục đích ngược lại với hoạt động 1 kiểm tra xem một phương trình bậc hai đối với x và y có phải là phương trình đường tròn hay không ?

Trước hết muốn một phương trình bậc hai đối với x và y là phương trình đường tròn thì điều kiện đầu tiên là hệ số của x^2 và y^2 phải bằng nhau. Do đó phương trình thứ nhất không phải là phương trình đường tròn.

Khi điều kiện đó thoả mãn, ta có thể đưa phương trình bậc hai đó về dạng

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad (1)$$

và xét hai trường hợp :

– *Trường hợp 1.* $a^2 + b^2 - c \leq 0.$

Không có đường tròn nào thoả mãn phương trình đó.

– *Trường hợp 2.* $a^2 + b^2 - c > 0.$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn tâm $I(a\ ;\ b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Chương trình chỉ yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm thuộc đường tròn. Để viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc đường tròn (C) ta có thể thực hiện các bước sau :

Bước 1. Xác định tâm $I(a\ ;\ b)$ của (C).

Bước 2. Tìm vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của Δ

$$\vec{n} = \overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a\ ;\ y_0 - b)$$

Bước 3. Vận dụng công thức

$$M(x, y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_0} . \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Xét đường tròn $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$ (C_1)

(C_1) có tâm $I(1\ ;\ 1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2.$

b) $16x^2+16y^2+16x-8y-11=0$ (C_2)

$\Leftrightarrow x^2+y^2+x-\frac{1}{2}y-\frac{11}{16}=0.$

(C_2) có tâm $I\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{11}{16}}=1.$

c) $x^2+y^2-4x+6y-3=0.$ (C_3)

(C_3) có tâm $I(2\,;\,-3)$ và bán kính $R=\sqrt{4+9+3}=4.$

2. a) $(\mathcal{C})$ có tâm $I(-2\,;\,3)$ và đi qua $M(2\,;\,-3)$ nên $(\mathcal{C})$ có bán kính $R=IM=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$. Vậy phương trình của $(\mathcal{C})$ là :

$$(x+2)^2+(y-3)^2=52.$$

b) Ta có $I(-1\,;\,2)$.

$$d: x-2y+7=0.$$

$(\mathcal{C})$ có tâm I và tiếp xúc với (d) suy ra $(\mathcal{C})$ có bán kính R bằng khoảng cách từ I tới d :

$$R=\frac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy phương trình của $(\mathcal{C})$ là :

$$(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}.$$

c) Ta có $A(1\,;\,1), B(7\,;\,5)$.

Tâm I của $(\mathcal{C})$ là trung điểm của AB nên suy ra I có toạ độ $(4\,;\,3)$. Gọi R là bán kính của $(\mathcal{C})$, ta tính được $R^2=IA^2=9+4=13.$

Vậy phương trình của $(\mathcal{C})$ là :

$$(x-4)^2+(y-3)^2=13.$$

3. a) Ta có $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 2)$, $C(1 ; -3)$.

Phương trình của đường tròn $(\mathcal{C})$ có dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 . \ (1)$$

Thay toạ độ của các điểm A, B, C vào (1) ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1+4-2a-4b+c=0 \\ 25+4-10a-4b+c=0 \\ 1+9-2a+6b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-4b+c=-5 \\ -10a-4b+c=-29 \\ -2a+6b+c=-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=-1. \end{cases}$$

Vậy $(\mathcal{C})$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0.$$

b) Tương tự như câu a) ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a-8b+c=-20 \\ -10a-10b+c=-50 \\ -12a+4b+c=-40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-20. \end{cases}$$

Vậy $(\mathcal{C})$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$$

4. Xét đường tròn ($\mathcal{C}$) có phương trình :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

($\mathcal{C}$) tiếp xúc với Ox và Oy, nên : $|a|=|b|=R$.

Trường hợp 1. $b=a$

($\mathcal{C}$) : $\left(x-a\right)^2+\left(y-a\right)^2=a^2$

$$M(2\ ;\ 1)\in(\mathcal{C})\Leftrightarrow (2-a)^2+(1-a)^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-6a+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=5.\end{array}\right.$$

Trường hợp 2. $b=-a$

($\mathcal{C}$) : $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

$$M(2\ ;\ 1)\in(\mathcal{C})\Leftrightarrow \left(2-a\right)^2+(1+a)^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2a+5=0.$$

Phương trình vô nghiệm.

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài :

$$\left(C_1\right):(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

$$\left(C_2\right):(x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

5. Xét đường tròn ($\mathcal{C}$) có phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

($\mathcal{C}$) tiếp xúc với Ox và Oy nên : $|a|=|b|=R$.

Trường hợp 1. $b=a$

($\mathcal{C}$) : $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $d:4x-2y-8=0$

$$I(a\ ;\ a)\in \mathrm{d}\Leftrightarrow 4a-2a-8=0\Leftrightarrow a=4.$$

Trường hợp 2. $b=-a$

$(\mathcal{C})\ :\ (x-a)^2+(y+a)^2=a^2,\ d: 4x-2y-8=0$

$$I(a\ ;-a)\in d \Leftrightarrow 4a+2a-8=0 \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài :

$$(\mathrm{C}_1): (x-4)^2+(y-4)^2=16$$

$$(\mathrm{C}_2): \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}.$$

6. $(\mathcal{C})\ :\ x^2+y^2-4x+8y-5=0.$

a) $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2\ ;-4)$ và có bán kính :

$$R=\sqrt{4+16+5}=5.$$

b) Ta có $A(-1\ ;0)\in(\mathcal{C})$. Phương trình tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ tại A là :

$$(-1-2)(x+1)+(0+4)(y-0)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+4y-3=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-4y+3=0.$$

c) Tiếp tuyến Δ vuông góc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ nên phương trình Δ có dạng : $4x+3y+c=0$. Ta có

Δ tiếp xúc với $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|8-12+c|}{5}=5 \Leftrightarrow |c-4|=25$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-4=25 \\ c-4=-25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=29 \\ c=-21. \end{array}\right.$$

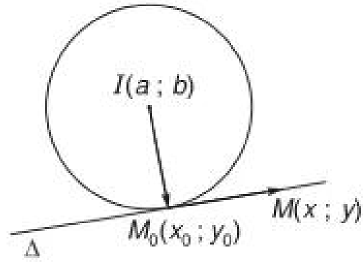
Vậy có hai tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ vuông góc với d, đó là :

$$\Delta_1: 4x+3y+29=0$$

$$\Delta_2: 4x+3y-21=0.$$

D. THAM KHẢO (NHỮNG KIẾN THỨC BỔ SUNG)

1. Trong thực hành người ta có thể dùng quy tắc phân đôi toạ độ để viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm thuộc đường tròn cụ thể như sau :



Hình 3.7

Cho đường tròn $(\mathcal{C})$ có phương trình

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$ (1)

Cho điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ thuộc $(\mathcal{C})$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ tại M_0. Ta có

$$M(x ; y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_0}.\overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0x + y_0y - ax + ax_0 - by + by_0 - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + (-x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0) = 0. \quad (*)$$

Do điểm M_0 thuộc $(\mathcal{C})$ nên ta có $-x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 = c$.

Thay vào (*) ta được $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$ (2)

Từ phương trình đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

ta có thể suy ra phương trình tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ tại điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ thuộc $(\mathcal{C})$ là : $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$

bằng quy tắc phân đôi toạ độ theo bảng sau :

Biểu thức trong phương trình (1)	Được thay thế bằng biểu thức để được phương trình (2)
$x^2 \to x\,.\,x$	$x_0\,.\,x$
$y^2 \to y\,.\,y$	$y_0\,.\,y$
$2x \to x + x$	$x + x_0$
$2y \to y + y$	$y + y_0$

2. Điều kiện tiếp xúc

Để lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(\mathcal{C})$ trong trường hợp không biết tiếp điểm $M_0(x_0\,;\,y_0)$ ta không thể dùng quy tắc phân đôi toạ độ. Khi đó ta thường dùng điều kiện tiếp xúc sau đây để xác định tiếp tuyến.

Cho đường tròn $(\mathcal{C}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

và đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$. Ta có

Δ tiếp xúc với $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R.$$

Căn cứ vào điều kiện này ta xác định được phương trình đường thẳng Δ.

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đường tròn $(\mathcal{C})$:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

biết Δ đi qua điểm $M(2\,;-1)$.

GIẢI

Δ đi qua $M(2\,;-1)$ nên phương trình có dạng :

$A(x-2) + B(y+1) = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$ hay $Ax + By + (B - 2A) = 0$.

$(\mathcal{C})$ có tâm $I(-1\,;\,2)$ và bán kính $R = 3$. Ta có

$(\mathcal{C})$ tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|(-1)(A) + 2(B) + B - 2A|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |3B - 3A| = 3\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow (B - A)^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow A \,.\, B = 0.$$

Nếu $A = 0$ thì $B \neq 0$ ta có

$$B(y+1) = 0$$

$$\text{hay} \qquad y + 1 = 0$$

Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$ ta có

$$A(x - 2) = 0$$

$$\text{hay} \qquad x - 2 = 0$$

Vậy phương trình hai tiếp tuyến với $(\mathcal{C})$ đi qua điểm $M(2 ; -1)$ là

$$\Delta_1 : y + 1 = 0$$

$$\Delta_2 : x - 2 = 0.$$