§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. MỤC ĐÍCH

– Học sinh nắm được định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ và các tính chất của tích vô hướng cùng với ý nghĩa vật lí của tích vô hướng.

– Học sinh biết sử dụng biểu thức toạ độ của tích vô hướng để tính độ dài của một vectơ, tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ và chứng minh hai vectơ vuông góc với nhau.

B. NỘI DUNG

1. Ta biết rằng không gian vectơ trên trường số thực là một tập hợp V mà mỗi phần tử được gọi là một vectơ. Trên không gian vectơ V này đã xác định phép tính cộng hai vectơ và phép nhân một số thực với một vectơ thoả mãn 8 tiên đề quen thuộc của không gian vectơ. Không gian vectơ V sẽ trở thành không gian vectơ Ơclit nếu trên đó đã xác định một dạng song tuyến tính xác định dương, nghĩa là với mỗi cặp vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều xác định một số thực $\vec{a}.\vec{b}$ thoả mãn bốn tiên đề sau đây :

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì thuộc V.

2) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì thuộc V.

3) $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$ với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì thuộc V và mọi số thực k.

4) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$.

Khi đó số thực $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giáo viên cần nhấn mạnh để học sinh thấy rằng *tích vô hướng* của hai vectơ không phải là một vectơ mà là một số thực. Mặt khác khi giới thiệu định nghĩa :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$$

ta cần tới hai khái niệm đó là độ dài của vectơ và góc giữa hai vectơ. Dùng định nghĩa tích vô hướng ta có thể tính được độ dài bằng công thức $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ và dựa vào công thức này ta có thể tính được độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng công cụ toạ độ.

Từ định nghĩa tích vô hướng ta tính được góc giữa hai vectơ dựa vào công thức sau đây :

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}.$$

2. Ứng dụng của tích vô hướng trong thực tế là có thể để tính công sinh ra bởi một lực trong vật lí theo công thức :

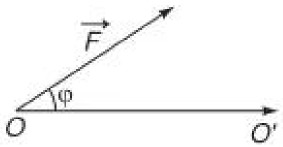
$$A = \vec{F}.\overrightarrow{OO'} = |\vec{F}|.|\overrightarrow{OO'}|.\cos\varphi \text{ trong đó :}$$

A là công tính bằng Jun (J) ;

$|\vec{F}|$ là cường độ của lực $\vec{F}$ tính bằng Niutơn (N) ;

$|\overrightarrow{OO'}|$ là độ dài của quãng đường tính bằng mét (m) ;

φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OO'}$ và $\vec{F}$ (h.2.4).



Hình 2.4

3. Trong sách giáo khoa Hình học 10 có nêu các tính chất sau đây của tích vô hướng :

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và mọi số k ta có :

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán)

2) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối)

3) $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$

4) $\vec{a}^2 \geq 0$; $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh 4 tính chất trên đây :

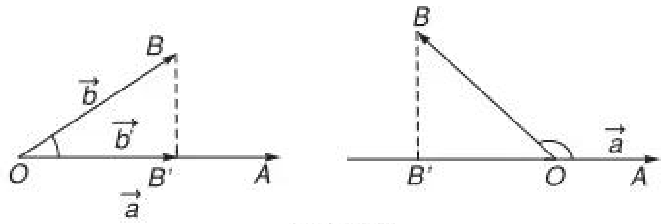
a) Tính chất 1) và 4) được suy trực tiếp từ định nghĩa.

b) Ta chứng minh tính chất 2) là tính chất phân phối của tích vô hướng.

Muốn chứng minh tính chất này ta dựa vào công thức hình chiếu sau đây :

"Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì ta có $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$ trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu của vectơ $\vec{b}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{a}$."

Ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Gọi điểm B' là hình chiếu của điểm B trên đường thẳng OA. Ta cần chứng minh : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$.



Hình 2.5

Thật vậy, nếu $\widehat{AOB} < 90^o$ thì $OB' = OB.\cos\widehat{AOB}$.

Khi đó $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'} = OA.OB'\cos 0^o = OA.OB\cos\widehat{AOB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

Nếu $\widehat{AOB} > 90^o$ thì ta có $OB' = OB\cos\widehat{BOB'} = -OB\cos(180^o - \widehat{BOB'})$

$$= -OB\cos\widehat{AOB}.$$

Do đó $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'} = OA.OB'.\cos 180^o = -OA.OB' = OA.OB\cos\widehat{AOB}$

hay $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

Nếu $\widehat{AOB} = 90^o$ ta có $\overrightarrow{OB'} = \vec{0}$ và tất nhiên $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$.

Bây giờ ta chứng minh tính chất $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$. (*)

Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì công thức (*) đúng nên ta chỉ xét trường hợp $\vec{a} \neq \vec{0}$.

• Xét trường hợp cả ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương. Khi đó ta có các số m, n sao cho $\vec{b} = m\vec{a}$ và $\vec{c} = n\vec{a}$. Do đó :

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.(m\vec{a} + n\vec{a}) = \vec{a}.(m+n)\vec{a} = (m+n)\vec{a}^2.$$

Mặt khác ta có :

$$\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=\vec{a}.m\vec{a}+\vec{a}.n\vec{a}=m\vec{a}^2+n\vec{a}^2=(m+n)\vec{a}^2.$$

Vậy $\qquad \vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}.$

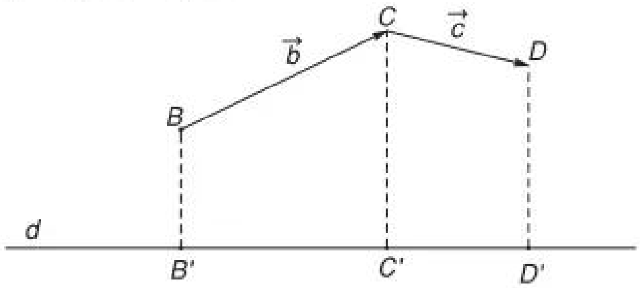
• Xét trường hợp tổng quát : Giả sử $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ và $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}$. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C, D trên đường thẳng d chứa vectơ $\vec{a}$. Khi đó theo công thức hình chiếu ta có (h.2.6) :

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\overrightarrow{B'C'}$$

$$\vec{a}.\vec{c}=\vec{a}.\overrightarrow{C'D'}$$

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\overrightarrow{BD}=\vec{a}.\overrightarrow{B'D'}$$



Hình 2.6

Như vậy $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\overrightarrow{B'D'}$

$$=\vec{a}(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'})$$

$$=\vec{a}.\overrightarrow{B'C'}+\vec{a}.\overrightarrow{C'D'}=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

c) Ta chứng minh tính chất 3) : $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.(k\vec{b})$.

• Nếu k $\geq$ 0 thì hai góc $(\vec{a},\ \vec{b})$ và $(k\vec{a},\ \vec{b})$ bằng nhau.

Do đó $(k\vec{a}).\vec{b}=|k\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(k\vec{a},\vec{b})=k|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\ \vec{b})=k(\vec{a}.\vec{b})$.

• Nếu k < 0 thì $|k|=-k$ và hai góc $(\vec{a},\ \vec{b})$ và $(k\vec{a},\ \vec{b})$ bù nhau.

Vì vậy $(k\vec{a}).\vec{b}=|k\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(k\vec{a},\ \vec{b})=-k|\vec{a}|.|\vec{b}|(-\cos(\vec{a},\ \vec{b}))$.

Do đó $(k\vec{a}).\vec{b} = k|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\ \vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$.

• $\vec{a}.(k\vec{b}) = (k\vec{b}).\vec{a} = k.(\vec{b}.\vec{a}) = k.(\vec{a}.\vec{b})$.

Vậy $(k\vec{a}).\vec{b} = k.(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k.\vec{b})$.

4. Bình phương vô hướng là một trường hợp đặc biệt của tích vô hướng. Bình phương vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ thường được kí hiệu là $(\vec{a})^2$ và để đơn giản kí hiệu là $\vec{a}^2$. Ta chú ý rằng $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ và dựa vào công thức này ta có thể tính độ dài của một vectơ theo công thức

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Từ đó ta suy ra với hai điểm A và B ta có $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ và khoảng cách giữa hai điểm A và B được tính theo công thức :

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}.$$

5. Có nhiều cách định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ. Ngoài cách định nghĩa có tính chất truyền thống đã nêu ở trong sách giáo khoa mà nhiều nước trên thế giới đang sử dụng, người ta còn có thể dùng các định nghĩa khác như sau :

a) $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$;

b) $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$;

c) $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right)$;

d) $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, trong đó $(a_1\ ;\ a_2)$ và $(b_1\ ;\ b_2)$ lần lượt là toạ độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong hệ toạ độ Oxy. (Tất nhiên định nghĩa này không phụ thuộc vào hệ toạ độ đã chọn).

Mỗi định nghĩa nêu trên đây đều có những ưu điểm và nhược điểm riêng của nó.

– Các định nghĩa nêu ở các mục a), b), c) có ưu điểm là trong đó chỉ dùng độ dài của vectơ mà không dùng đến góc, nhưng lại phải dùng đến các khái niệm tổng vectơ, hiệu vectơ và bình phương vô hướng của các vectơ.

– Định nghĩa nêu ở mục d) đơn giản vì chỉ dùng các con số biểu thị toạ độ trực chuẩn của mỗi vectơ, nhưng muốn dùng định nghĩa này cần phải chứng minh rằng định nghĩa này đúng và không thay đổi đối với các hệ toạ độ Oxy khác nhau.

Thực chất của các định nghĩa trên đây là xác định một ánh xạ $f : V \times V \to \mathbb{R}$ đặt tương ứng hai vectơ bất kì của không gian vectơ V với một số thực duy nhất sao cho thoả mãn bốn tiên đề của không gian vectơ Ơclit đã nêu ở phần 3.

6. Hoạt động 1 nhằm củng cố định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ, đồng thời kết hợp ôn về các giá trị lượng giác của góc giữa hai vectơ.

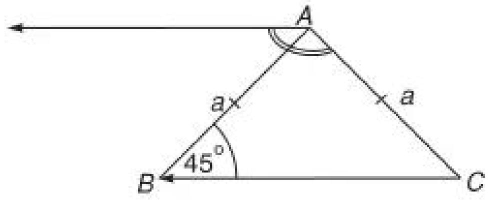
Hoạt động 2 nhằm củng cố việc dùng tích vô hướng để chứng minh hai vectơ vuông góc.

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a\,.\,a\,.\cos 90^{\circ} = 0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{CB}|\cos 135^{\circ}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = a.a\sqrt{2}.\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2$ (h.2.7).



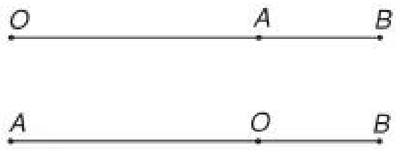
Hình 2.7

2. a) Khi O nằm ngoài đoạn AB ta có :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = a\,.\,b\,.\cos 0^{\circ} = a\,.\,b.$

b) Khi O nằm giữa hai điểm A và B ta có :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = a.b.\cos 180^{\circ} = -a.b$ (h.2.8).



Hình 2.8

3. a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AI}|.|\overrightarrow{AM}|\cos(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AM}) = AI.AM$ (1)

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AI}|.|\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}) = AI.AB\cos\widehat{IAB}$

$= AI.AM$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ (h.2.9). (3)

Tương tự ta chứng minh được $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$. (4)

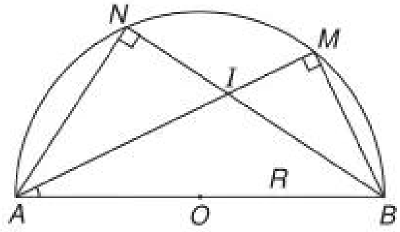
b) Từ hai đẳng thức (3) và (4) ở câu a) ta có :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA}$$

$$= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}$$

$$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2.$$



Hình 2.9

4. a) Vì điểm D nằm trên trục Ox nên toạ độ của nó có dạng $(x\ ;\ 0)$ (h.2.10).

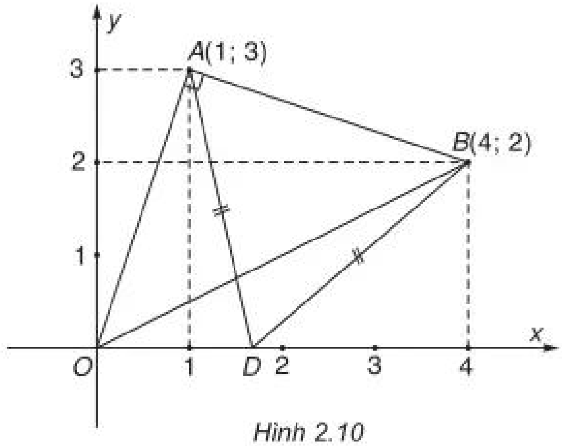
Theo giả thiết ta có $DA = DB$, nên $DA^2 = DB^2$.

Do đó : $(1 - x)^2 + 3^2 = (4 - x)^2 + 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 9 = x^2 - 8x + 16 + 4$

$\Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

Vậy D có toạ độ là $\left(\frac{5}{3}\ ;\ 0\right)$.



Hình 2.10

b) Gọi $2p$ là chu vi tam giác OAB, ta có :

$2p = OA + OB + AB$

$= \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{4^2 + 2^2} + \sqrt{3^2 + 1^2}$

$= \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{10}$

$2p = 2\sqrt{10} + \sqrt{20} = \sqrt{10}(2 + \sqrt{2})$.

c) Vì $OA = AB = \sqrt{10}$ và $OB = \sqrt{20}$ nên ta có $OB^2 = OA^2 + AB^2$.

Vậy tam giác OAB vuông cân tại A.

Do đó $S_{OAB} = \frac{OA.AB}{2} = \frac{\sqrt{10}.\sqrt{10}}{2} = 5.$

(Có thể chứng minh $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ bằng cách chứng minh $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB} = 0$.)

5. a) $\vec{a}.\vec{b} = 2.6 + (-3).4 = 0$. Vậy $\vec{a} \perp \vec{b}$ hay $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90^{o}$.

b) $\vec{a}.\vec{b} = 3.5 + 2.(-1) = 13$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{13}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $(\vec{a},\vec{b}) = 45^{o}$.

c) $\vec{a}.\vec{b} = (-2).3 + (-2\sqrt{3}).\sqrt{3} = -6 - 6 = -12$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{-12}{4.2\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $(\vec{a},\vec{b}) = 150^{o}$.

6. Muốn chứng minh tứ giác *ABCD* là hình vuông, ta có nhiều cách. Chẳng hạn các cách sau đây :

Cách 1 : Chứng minh *ABCD* là hình thoi có một góc vuông, cụ thể là cần chứng minh $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}|$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$.

Cách 2 : Chứng minh ABCD là hình thoi và có hai đường chéo bằng nhau, cụ thể là cần chứng minh $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}|$ và $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Cách 3 : Chứng minh *ABCD* là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau nghĩa là cần chứng minh :

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$

Cách 4 : Chứng minh *ABCD* là hình chữ nhật có hai cạnh liên tiếp bằng nhau nghĩa là cần chứng minh :

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$
- $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$.

7. Theo giả thiết ta có $B(2\ ;\ -1)$ và $C(x\ ;\ 2)$ (h.2.11)

Do đó $\overrightarrow{CA} = (-2 - x\ ;\ -1)$

$\overrightarrow{CB} = (2 - x\ ;\ -3)$

Tam giác ABC vuông tại C nên :

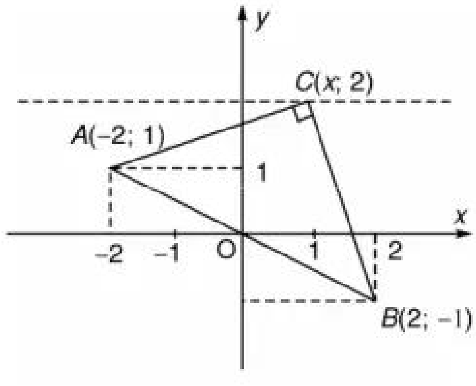
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$

$\Leftrightarrow (-2 - x)(2 - x) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1.$

Vậy ta có hai điểm $C(1 ; 2)$ và $C' (-1 ; 2)$.



Hình 2.11