§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A. MỤC ĐÍCH

1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, dựng được vectơ tổng $\vec{a} + \vec{b}$ theo định nghĩa hoặc theo quy tắc hình bình hành. Người ta thường gọi phép toán tìm tổng của hai vectơ là phép cộng hai vectơ.

2. Nắm được các tính chất của tổng của hai vectơ.

3. Nắm được định nghĩa hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Người ta thường gọi phép toán tìm hiệu của hai vectơ là phép trừ hai vectơ.

4. Học sinh vận dụng được các công thức sau đây để giải toán :

a) Với ba điểm A, B và C bất kì ta luôn có :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

b) I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

c) G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. NỘI DUNG

1. Lần đầu tiên học sinh được học cách tính tổng của hai đối tượng mà không phải là các số.

Một phép toán trên một tập hợp A là một ánh xạ từ $A \times A$ vào A, nghĩa là với hai phần tử thuộc A ta xác định được một phần tử duy nhất cũng thuộc A. Phép cộng vectơ là phép toán trên tập hợp V các vectơ trên mặt phẳng, với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta xác định được vectơ thứ ba duy nhất, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Một ý nghĩa thực tế đồng thời cũng là một minh hoạ trực quan của tổng của hai vectơ là tổng hợp hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật. Trong định nghĩa tổng của hai vectơ (thực chất là của hai lớp vectơ bằng nhau), ta đã dùng các đại diện của hai vectơ đó. Vì vậy chú ý (bỏ qua chứng minh) rằng tổng đó không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện. Theo định nghĩa phép cộng, nếu $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Như vậy, với ba điểm bất kì M, N, P ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ và đẳng thức này còn gọi là quy tắc ba điểm đối với phép cộng vectơ.

Trong vật lí, người ta tìm tổng hợp hai lực không cùng phương theo quy tắc hình bình hành.

Để áp dụng quy tắc hình bình hành, khi tính $\vec{a}+\vec{b}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, thì trước tiên ta phải lấy điểm A tuỳ ý, dựng hình bình hành $ABCD$ sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Khi đó $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

2. Hoạt động 1 nhằm giúp ghi nhớ các tính chất của phép cộng. Giáo viên có thể tiến hành hoạt động 1 như sau :

Yêu cầu một học sinh tìm $\vec{a} + \vec{b}$ rồi $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, một học sinh khác tìm $\vec{b}+\vec{c}$ rồi tìm $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Từ đó suy ra $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. Học sinh đã được học về cân bằng lực ở vật lí lớp 8. Hai tốp kéo co không phân thắng bại là do hai lực kéo có cường độ bằng nhau nhưng ngược hướng. Đó là một hình ảnh trực quan của hai vectơ đối nhau. SGK đã định nghĩa vectơ đối bằng cách đó. Chú ý rằng nếu $\vec{a} = -\vec{b}$ thì $\vec{b} = -\vec{a}$, vì vậy có thể nói đến khái niệm đối nhau của hai vectơ. Trong tính toán và trong các áp dụng cần sử dụng điều kiện sau (mà có thể dùng nó làm định nghĩa) :

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ là hai vectơ đối nhau} \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b} = \vec{0}.$$

Ý nghĩa thực tế của điều kiện này là nếu hai lực tác dụng vào một chất điểm có cùng cường độ và ngược hướng thì hợp lực là một lực có cường độ bằng không và vật đứng yên.

Từ hoạt động 3 có thể yêu cầu chứng minh điều kiện : Nếu $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{b} = -\vec{a}$. Thật vậy, nếu $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$ và giả sử $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ thì $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Do đó $C \equiv A$ và $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$. Như vậy $\vec{b} = -\vec{a}$. Ngược lại, nếu $\vec{a} = -\vec{b}$, giả sử $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ thì $-\vec{b} = \overrightarrow{BA}$. Như vậy $\vec{a}+\vec{b} =$ $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

4. Trong không gian vectơ có hai phép toán đó là phép cộng hai vectơ và phép nhân vectơ với một số. Vì vậy phép trừ được định nghĩa thông qua phép cộng và vectơ đối, $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$. Nếu $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ thì $-\vec{b} = \overrightarrow{BO}$. Do đó $\vec{a}-\vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

Về mặt thực hành, nếu $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ cho trước ta luôn có thể phân tích như sau :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}, \ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \text{ với } O \text{ là một điểm tuỳ ý.}$$

5. Bằng công cụ vectơ ta có thêm một cách để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB và G là trọng tâm của tam giác ABC.

Điều kiện I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ có thể chứng minh như sau :

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Ngược lại nếu $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. Suy ra A, I, B thẳng hàng và $AI = IB$. Do đó I là trung điểm của AB.

Trong §3 ta sẽ mở rộng các điều kiện này khi sử dụng tích của một số với một vectơ.

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1.

Hình 1.3

Vẽ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MB}$. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}$.

Hình 1.4

Vẽ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM}$. Khi đó $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MD}$.

2. *Cách 1.* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$

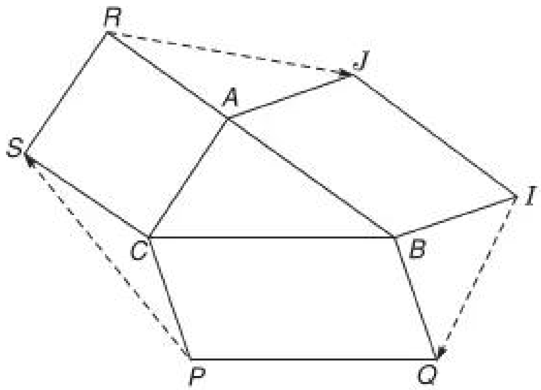
Cách 2. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Đẳng thức cuối cùng đúng. Vậy ta có điều cần chứng minh.

3. a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$. Vậy $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

4. (h.1.5)



Hình 1.5

$$\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS}$$

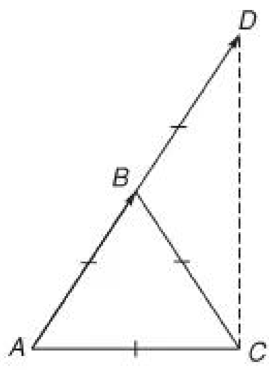
$$=\left(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS}\right)+\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC}\right)=\vec{0}.$$

5. (h.1.6)

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a$.

Vẽ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}$, khi đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$.

Như vậy $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=CD=a\sqrt{3}$.



Hình 1.6

6. (h.1.7)

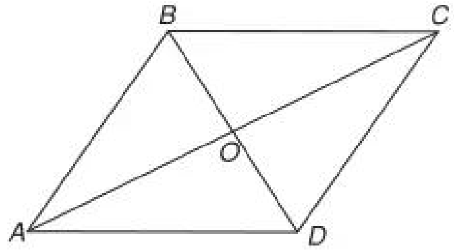
a) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CD}$.

Vì $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ nên $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

d) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$, vì $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{DC}$.



Hình 1.7

7. a) Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác và $AB + BC > AC$. Vì $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ nên $|\vec{a} + \vec{b}| = AC < AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

- Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng ta có $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
- Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

b) Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, ta dựng hình bình hành $OACB$. Khi đó $|\vec{a} + \vec{b}| = OC, |\vec{a} - \vec{b}| = AB$. Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ khi và chỉ khi hình bình hành là hình chữ nhật, nghĩa là các giá của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Trường hợp $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, ta chỉ cần xét $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng. Theo ví dụ trên, dễ thấy đẳng thức trong đề bài không xảy ra.

8. $|\vec{a} + \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{b}$.

Vậy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài và ngược hướng.

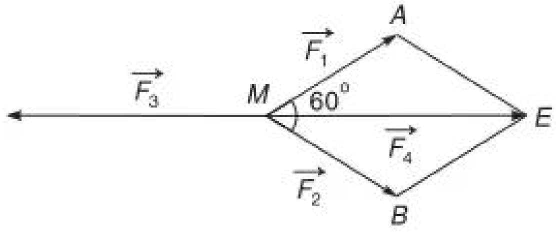
9. Gọi I_1 là trung điểm của AD và I_2 là trung điểm của BC. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI_1} + \overrightarrow{I_1I_2} + \overrightarrow{I_2B} = \overrightarrow{CI_2} + \overrightarrow{I_2I_1} + \overrightarrow{I_1D}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI_1} - \overrightarrow{I_1D}\right) + \overrightarrow{I_1I_2} = \overrightarrow{I_2I_1} + \left(\overrightarrow{CI_2} - \overrightarrow{I_2B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{I_1I_2} = \overrightarrow{I_2I_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{I_1I_2} = \vec{0} \Leftrightarrow I_1 \equiv I_2.$$

10. Vật đứng yên là do $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$. Vẽ hình thoi $MAEB$ ta có $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{ME}$ và lực $\overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{ME}$ có cường độ là $100\sqrt{3}$ (h.1.8). Ta có $\overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$, do đó $\overrightarrow{F_3}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{F_4}$. Như vậy $\overrightarrow{F_3}$ có cường độ là $100\sqrt{3}\,N$ và ngược hướng với $\overrightarrow{F_4}$.



Hình 1.8