§3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. MỤC ĐÍCH

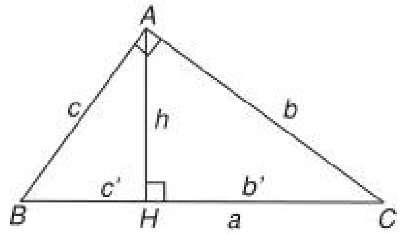
– Học sinh nắm được định lí côsin và định lí sin trong tam giác và biết vận dụng các định lí này để tính cạnh hoặc góc của một tam giác trong các bài toán cụ thể.

– Học sinh biết sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến theo ba cạnh của tam giác và các công thức tính diện tích tam giác.

– Học sinh biết giải tam giác và biết thực hành việc đo đạc trong thực tế.

B. NỘI DUNG

Hoạt động 1 nhằm nhắc lại các hệ thức lượng mà học sinh đã biết đối với tam giác vuông đồng thời để đặt vấn đề chuyển tiếp sang nội dung các hệ thức lượng trong tam giác thường. Đó là các hệ thức (h.2.12) :



Hình 2.12

- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lí Py-ta-go) ;
- $b^2 = ab'$ (b' là hình chiếu của cạnh b trên cạnh a) ;
- $c^2 = ac'$ (c' là hình chiếu của cạnh c trên cạnh a) ;
- $h^2 = b'c'$ (h là chiều cao của tam giác ứng với cạnh huyền) ;
- $ah = bc = 2S_{ABC}$ (S_{ABC} là diện tích tam giác ABC) ;
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Ngoài ra còn các hệ thức khác như :

- $b = a.\sin B = a.\cos C = c.\tan B = c.\cot C$;
- $c = a.\sin C = \mathrm{a}.\cos B = b.\tan C = b.\cot B$.

1. Định lí côsin

Khi giới thiệu bài toán cụ thể để giúp học sinh tìm ra công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ cần phân tích để học sinh thấy rằng tam giác ABC đã cho hoàn toàn được xác định theo trường hợp cạnh – góc – cạnh của các trường hợp bằng nhau đối với tam giác thường.

Để trình bày nội dung của định lí côsin trong tam giác, trước đây ta thường giới thiệu nội dung của định lí trước rồi sau đó mới nêu chứng minh. Ở đây giáo viên có thể thay đổi cách dạy bằng cách đặt vấn đề dẫn dắt, làm cho bài toán xuất hiện một cách tự nhiên và cần thiết. Chúng ta có thể gợi ý như sau :

Nếu trong tam giác ABC, biết các cạnh b và c đồng thời cho biết góc A vuông thì ta có $a^2 = b^2 + c^2$ theo định lí Py-ta-go. Bây giờ nếu góc A không vuông mà bằng một giá trị nào đó thì độ dài cạnh a sẽ thay đổi phụ thuộc vào sự thay đổi của góc A. Sau đó cần hướng dẫn cho học sinh viết biểu thức quen thuộc $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ và bình phương hai vế ta có :

$$a^2 = \vec{a}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Như vậy định lí côsin là định lí mở rộng của định lí Py–ta–go và từ đó ta có thể suy ra định lí côsin đúng với tam giác thường thì tất nhiên định lí đó cũng đúng với tam giác vuông hoặc tam giác đều.

Từ định lí côsin được phát biểu bằng công thức, chúng ta cần tập cho học sinh phát biểu bằng lời về nội dung công thức đó theo Hoạt động 2 :

"Trong một tam giác, bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh kia, trừ hai lần tích của chúng và côsin của góc xen giữa hai cạnh đó".

Hoạt động 3 nhằm củng cố định lí côsin đối với tam giác *ABC* có một góc vuông. Phần hệ quả của định lí côsin để tính các góc của tam giác có thể cho học sinh tự tìm hiểu và có thể cho học sinh làm các ví dụ tại lớp học.

Bài toán tính độ dài đường trung tuyến của tam giác được xem là một áp dụng của định lí côsin nên được trình bày sau phần định lí côsin. Tuy nhiên người ta cũng có thể tính độ dài đường trung tuyến của tam giác theo ba cạnh bằng một cách khác.

Giả sử ta cần tính độ dài đường trung tuyến *AM* vẽ từ *A* của tam giác *ABC*. Đặt $m_a = AM$ (h.2.13), ta có :

$$b^2 + c^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right)^2$$

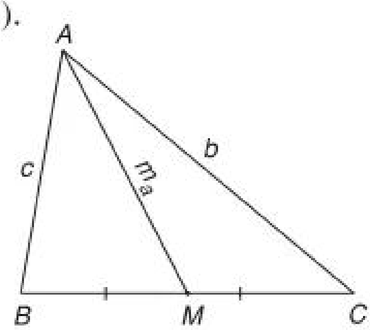
$$= \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB}$$

$$= 2\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

Do đó $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}$

(vì $MB^2 = MC^2 = \dfrac{a^2}{4}$ *và* $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$).

Vậy $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.



Hình 2.13

Hoạt động 4 nhằm củng cố công thức tính độ dài đường trung tuyến.

2. Định lí sin

Trong tam giác vuông *ABC* vuông ở *A* có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có hệ thức :

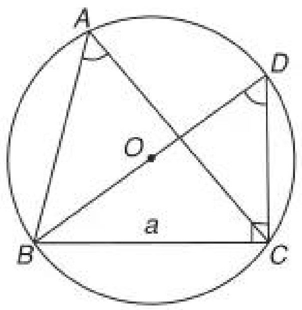
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

với *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

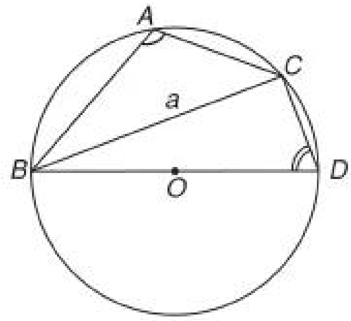
Vậy trong trường hợp góc A của tam giác ABC không vuông liệu hệ thức trên có còn đúng nữa hay không ? Ta lần lượt xét hai trường hợp : góc A nhọn và góc A tù.

Ta vẽ thêm đường kính BD của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong trường hợp góc A nhọn hoặc tù ta đều có thể chứng minh được $BC = BD \sin A$ hay $a = 2R \sin A$ (h. 2.14 và h.2.15).

Do đó ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$



Hình 2.14



Hình 2.15

Các đẳng thức $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ và $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ được chứng minh tương tự.

Như vậy trong cả ba trường hợp $\widehat{A} = 90^{\circ}$, $\widehat{A} < 90^{\circ}$ và $\widehat{A} > 90^{\circ}$ ta đều có :

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

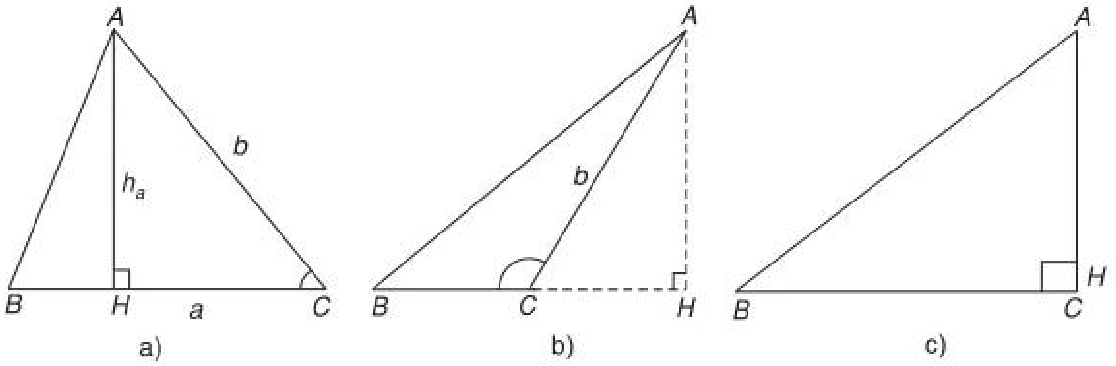
Hoạt động 6 nhằm củng cố định lí sin. Tam giác đều ABC có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^{\circ}$.

Ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ mà $\sin A = \sin 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, vậy $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2R$. Do đó $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. Công thức tính diện tích tam giác

Hoạt động 7 nhằm ôn lại các công thức tính diện tích tam giác mà học sinh đã học ở lớp dưới.

a) Trước hết ta chứng minh công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.



Hình 2.16

Ta đã biết $S = \frac{1}{2}ah_a$, trong đó $h_a = AH = AC\sin\widehat{ACH} = b\sin\widehat{ACH}$.

- Nếu góc C của tam giác ABC là góc nhọn thì $\widehat{ACH} = \widehat{C}$ (h.2.16a)
- Nếu góc C của tam giác ABC là góc tù thì $\widehat{ACH} = 180^o - \widehat{C}$ (h.2.16b)

Trong cả hai trường hợp ta đều có $\sin\widehat{ACH} = \sin C$.

Do đó $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{ACH} = \frac{1}{2}ab\sin C$.

- Nếu $\widehat{C} = 90^o$ thì $h_a = b$ và $\sin C = 1$ nên ta vẫn có $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ (h.2.16c).

Các công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ và $S = \frac{1}{2}ca\sin B$ được chứng minh tương tự.

b) Muốn chứng minh công thức $S = \frac{abc}{4R}$ để thực hiện hoạt động 8 ta dùng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ trong đó $\sin C = \frac{c}{2R}$ và suy ra công thức cần chứng minh.

c) Để thực hiện hoạt động 9 ta chứng minh công thức $S = pr$ trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta chia tam giác ABC thành ba tam giác : OAB, OBC và OCA. Ba tam giác này đều có chiều cao bằng r. Ta có :

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = pr.$$

d) Sau đây chúng ta trình bày một trong các cách chứng minh công thức Hê-rông :

Từ công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ ta suy ra

$$4S^2 = b^2c^2\sin^2 A = b^2c^2(1-\cos^2 A)$$

hay $$4S^2 = b^2c^2(1-\cos A)(1+\cos A). \qquad (*)$$

Theo định lí côsin ta có : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Do đó $$1+\cos A = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$$

$$1-\cos A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

Thay các giá trị này vào hệ thức (*) ta có :

$$4S^2 = \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Vì $a + b + c = 2p$ nên $a + b - c = 2(p - c)$

$b + c - a = 2(p - a)$

$c + a - b = 2(p - b)$

ta suy ra : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

hay $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hê-rông).

4. Vấn đề giải tam giác và ứng dụng vào việc đo đạc trong thực tế là vấn đề làm cho toán học gắn với đời sống. Các em học sinh sẽ rất thích thú khi chỉ bằng tính toán có thể gián tiếp đo được chiều cao của một toà cao ốc, chiều cao của một cây cổ thụ, hay những khoảng cách mà các em không thể nào đo trực tiếp được. Trong thực hành các em sẽ có điều kiện phát huy óc tìm tòi và sáng tạo.

Để tiến hành việc đo đạc cần chuẩn bị một bộ dụng cụ gồm có :

– Cái giác kế tự tạo dùng để đo góc theo chiều ngang và đo góc theo chiều thẳng đứng.

– Một số cọc ngắm và một số sợi dây đo, trên đó có số đo kích thước.

– Một bộ dụng cụ dùng để vẽ và tính toán : tấm ván, giấy, bút, thước, compa, máy tính bỏ túi, v.v.

Tùy tình huống cụ thể, trước khi đo giáo viên nên vạch phương án sao cho khả thi, hướng dẫn học sinh biết dùng các kiến thức đã học để tính toán. Nên tổ chức thành từng nhóm nhỏ để đo đạc và tính toán với những bài tập cụ thể. Khi đo và tính toán xong cần tổ chức đánh giá và rút kinh nghiệm. Muốn tổ chức một bài thực hành đo đạc, giáo viên cần phải nghiên cứu địa điểm để việc thực tập có hiệu quả, nghiên cứu việc tổ chức và đề ra kế hoạch thực hiện đề phòng những điều bất trắc có thể xảy ra.

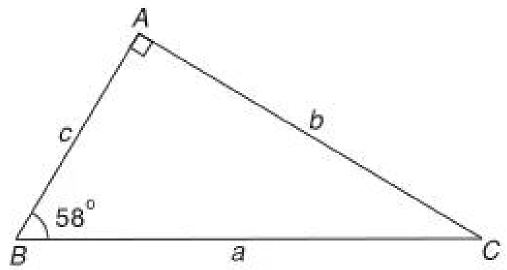
C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. $\widehat{C} = 90^o - \widehat{B} = 90^o - 58^o = 32^o$ (h. 2.17).

$b = a\sin B = 72.\sin 58^o \approx 61{,}06$ (cm),

$c = a\sin C = 72.\sin 32^o \approx 38{,}15$ (cm),

$h_a = \dfrac{b.c}{a} \approx 32{,}36$ (cm).



Hình 2.17

2. Theo định lí côsin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7225 + 2916 - 2714{,}41}{2.85.54} \approx 0{,}8090$$

$\Rightarrow \widehat{A} \approx 36^o$.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2714{,}41 + 2916 - 7225}{2.52{,}1.54} \approx -0{,}2834$$

$$\Rightarrow \ \widehat{B} \approx 106^{\circ}28'$$

$$\widehat{C} = 180^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 37^{\circ}32'.$$

3. Theo định lí côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \ = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\left(-\frac{1}{2}\right) = 129$$

$$\Rightarrow a \approx 11{,}36 \text{ cm}.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{129 + 5^2 - 8^2}{2.11{,}36.5} \approx 0{,}79$$

$$\Rightarrow \ \widehat{B} \approx 37^{\circ}48'.$$

$$\widehat{C} = 180^{\circ} - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 22^{\circ}12'.$$

4. $p = \frac{1}{2}(7 + 9 + 12) = 14$.

$S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} \approx 31{,}3$ (đvdt).

5. $BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^{\circ} \ \Rightarrow \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\Rightarrow \ BC = \sqrt{b^2 + c^2 + bc} \ = \sqrt{m^2 + n^2 + mn}.$$

6. a) Nếu tam giác ABC có góc tù thì góc tù đó phải đối diện với cạnh lớn nhất là c = 13cm. Ta có công thức

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$169 = 64 + 100 - 2.8.10.\cos C$$

$$\Rightarrow \ \cos C = \frac{64 + 100 - 169}{2.8.10} = -\frac{5}{160} \Rightarrow \widehat{C} \approx 91^{\circ}47'$$ là góc tù của tam giác.

b) Ta có $MA^2 = m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

$$m_a^2 = \dfrac{2\left(10^2+13^2\right)-8^2}{4} \approx 118,5$$

$$m_a \approx 10,89 \text{ cm}.$$

7. a) Vì cạnh $c = 6$ cm lớn nhất nên góc C lớn nhất, ta có

$$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{3^2+4^2-6^2}{2.3.4} = -\dfrac{11}{24}$$

$$\Rightarrow \widehat{C} \approx 117^o16'.$$

b) Vì cạnh $a = 40$ cm lớn nhất nên góc A lớn nhất, ta có

$$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{13^2+37^2-40^2}{2.13.37} = -\dfrac{62}{962} \approx 0,064.$$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 93^o41'.$$

8. $\widehat{A} = 180^o - \left(\widehat{B}+\widehat{C}\right) = 180^o - 140^o = 40^o.$

Vì $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ nên

$$2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{137,5}{\sin 40^o} \approx \dfrac{137,5}{0,6429} \approx 214 \text{ (cm)},$$

$$b = 2R\sin B = 2R\ \sin 83^o \approx 212,31 \text{ (cm)},$$

$$c = 2R\sin C = 2R\ \sin 57^o \approx 179,40 \text{ (cm)}.$$

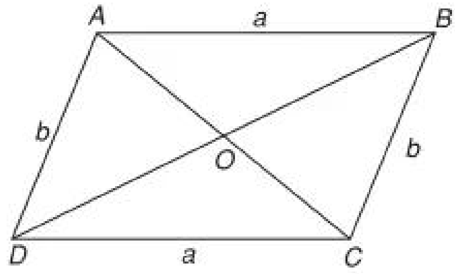
9. Hai đường chéo AC và BD của hình bình hành cắt nhau tại O. Theo giả thiết ta có :

Cách 1. Ta có

$$m^2+n^2 = \overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2$$

$$= 2(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AB}^2) = 2(a^2+b^2).$$

Cách 2. $m^2 + n^2 = 4\left(AO^2 + BO^2\right)$ (h.2.18).



Hình 2.18

Mà $AO^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{n^2}{4}$

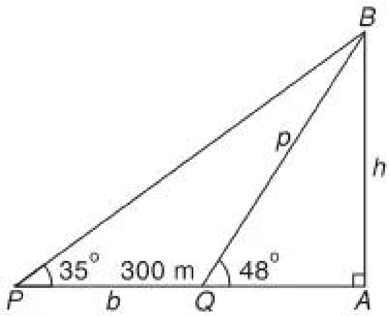
và $BO^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{m^2}{4}$

nên $m^2 + n^2 = 4\left(\dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{n^2}{4} + \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{m^2}{4}\right)$

$$= 4\left(a^2+b^2\right) - m^2 - n^2$$

hay $m^2 + n^2 = 2\left(a^2+b^2\right)$.

10. Xét tam giác BPQ (h.2.19).



Hình 2.19

Ta có $\widehat{PBQ} = 48^\circ - 35^\circ = 13^\circ$.

Ta có : $\dfrac{BQ}{\sin P} = \dfrac{PQ}{\sin B} \Leftrightarrow \dfrac{BQ}{\sin 35^\circ} = \dfrac{300}{\sin 13^\circ}$.

Do đó $BQ = \dfrac{300.\sin 35^\circ}{\sin 13^\circ} \Rightarrow BQ \approx 764{,}935$ (m).

Chiều cao AB của tháp là :

$AB = BQ.\sin 48^\circ \approx 764{,}935.\sin 48^\circ \approx 568{,}457$ (m).

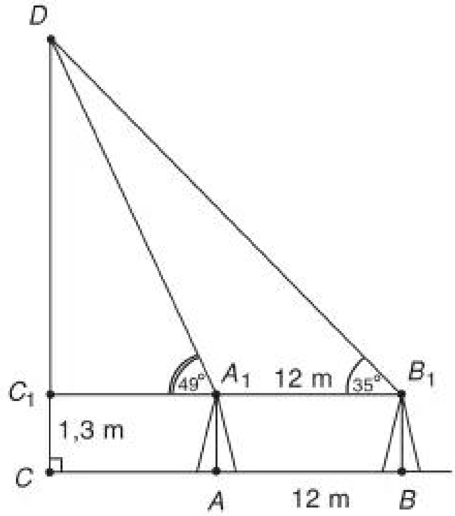
11. Tam giác DA_1B_1 (h.2.20) có

$\widehat{A_1DB_1} = 49^\circ - 35^\circ = 14^\circ$.

Theo định lí sin ta có :

$\dfrac{A_1B_1}{\sin D} = \dfrac{A_1D}{\sin 35^\circ} \Leftrightarrow \dfrac{12}{\sin 14^\circ} = \dfrac{A_1D}{\sin 35^\circ}$

$\Rightarrow A_1D = \dfrac{12.\sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28{,}451$ (m).



Hình 2.20

Trong tam giác vuông A_1C_1D ta có :

$C_1D = A_1D\sin 49^{o} \approx 28,451.\sin 49^{o} \approx 21,472$ (m).

Chiều cao CD của Tháp Chàm là :

$CD = C_1D + C_1C \approx 21,472 + 1,3 = 22,772$ (m).