

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

A. MỤC ĐÍCH

1. Hiểu được định nghĩa của elip.
2. Lập được phương trình chính tắc của elip khi biết hai trong ba yếu tố : trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự. Cần lưu ý rằng trong sách này ta chỉ gọi phương trình có dạng sau đây là phương trình chính tắc của elip :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a).$$

3. Từ phương trình chính tắc của elip, xác định được trục lớn, trục nhỏ, tiêu cự, tiêu điểm, các đỉnh, v.v.
4. Thông qua phương trình chính tắc của elip để tìm hiểu tính chất hình học và giải một số bài toán cơ bản về elip.

B. NỘI DUNG

Vì ít thời gian nên chương trình hạn chế chỉ trình bày một trong ba đường conic. Riêng phương trình chính tắc của elip cũng chỉ trình bày trong trường hợp hai tiêu điểm nằm trên trục Ox .

1. Hoạt động 1 và 2 có mục đích giới thiệu đường elip đồng thời cho thấy mối liên hệ giữa elip và đường tròn.
2. Hoạt động 3 giúp học sinh chú ý điều kiện $a > c$ để hiểu được cách đặt $b^2 = a^2 - c^2$. Đồng thời sau hoạt động này giáo viên cũng có thể nói thêm rằng từ đẳng thức đó suy ra $b < a$ và tiêu điểm luôn nằm trên trục lớn.
3. Hoạt động 4 có mục đích luyện tập kỹ năng xác định hình dạng một elip khi đã biết phương trình chính tắc của elip đó. Kỹ năng này đã được hướng dẫn thông qua ví dụ cụ thể đối với elip (E) :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \text{ (h.3.8).}$$

(E) có tiêu điểm là

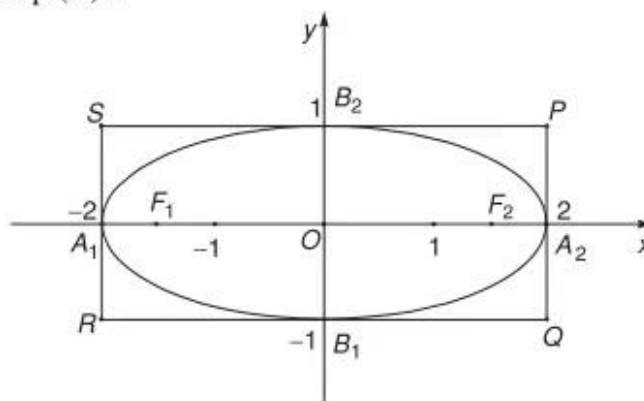
$$F_1(-\sqrt{3}; 0),$$

$$F_2(\sqrt{3}; 0) \text{ và tọa độ}$$

các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là

$$P(2; 1), Q(2; -1),$$

$$R(-2; -1), S(-2; 1).$$



Hình 3.8

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có $a = 5, b = 3, c^2 = a^2 - b^2 = 16, c = 4$.

Vậy (E) có trục lớn $2a = 10$, trục nhỏ $2b = 6$, tiêu điểm : $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$, các đỉnh : $A_1(-5; 0), A_2(5; 0), B_1(0; -3), B_2(0; 3)$.

$$\text{b) (E) : } 4x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

$$\text{Ta có } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{36}, c = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Vậy (E) có trục lớn $2a = 1$, trục nhỏ $2b = \frac{2}{3}$, tiêu điểm : $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right),$

$F_2\left(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right)$, các đỉnh : $A_1\left(-\frac{1}{2}; 0\right), A_2\left(\frac{1}{2}; 0\right), B_1\left(0; -\frac{1}{3}\right), B_2\left(0; \frac{1}{3}\right).$

$$c) (E) : 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Ta có $a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$.

Vậy (E) có trục lớn $2a = 6$, trục nhỏ $2b = 4$, tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$, các đỉnh : $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$.

$$2. a) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$b) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$3. a) (E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$M(0; 3) \in (E) \Leftrightarrow \frac{9}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b = 3.$$

$$N\left(3; \frac{12}{5}\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25.b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5.$$

Vậy (E) có phương trình chính tắc là : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

$$b) (E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, suy ra $c = \sqrt{3}$.

$$\text{Vậy ta có : } a^2 = b^2 + 3. \quad (1)$$

Thay toạ độ của điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ vào phương trình elip ta được :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1. \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta có : $b^2 = 1, a^2 = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

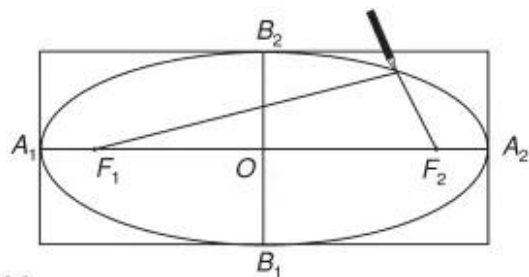
4. (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (h.3.9)

Ta có : $2a = 80, 2b = 40$.

Suy ra : $a = 40, b = 20$.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1600 - 400 = 1200.$$

$$\Rightarrow c = 20\sqrt{3}.$$



Hình 3.9

Ta phải ghim hai cái đinh tại hai tiêu điểm F_1 và F_2 , nghĩa là cách mép tấm ván ép một đoạn :

$$A_1F_1 = a - c = 40 - 20\sqrt{3} = 20(2 - \sqrt{3}) \approx 5,36 \text{ (cm)}.$$

Theo cách vẽ trong bài học vòng dây phải có chiều dài

$$2a + 2c = 80 + 40\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

5. Gọi bán kính của (C) là R. Ta có
$$\begin{cases} MF_1 = R + R_1 \\ MF_2 = R_2 - R. \end{cases}$$

Suy ra $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$.

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) có tiêu điểm là F_1, F_2 và trục lớn $2a = R_1 + R_2$.

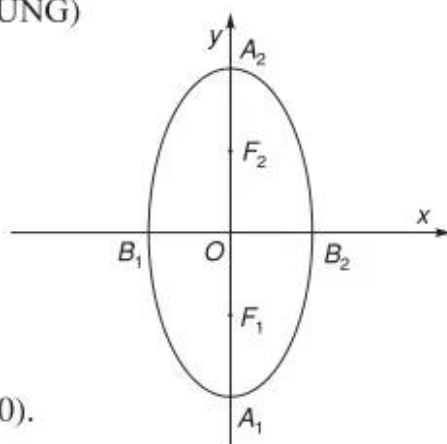
D. THAM KHẢO (NHỮNG KIẾN THỨC BỔ SUNG)

1. Phương trình elip có tiêu điểm trên Oy.

Trường hợp elip (E) có tiêu điểm $F_1(0 ; -c), F_2(0 ; c)$ và độ dài trục lớn $2a$ ($0 < c < a$) :

Thực hiện tương tự như trong sách giáo khoa ta có phương trình của (E) là

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = a^2 - c^2 \text{ (} 0 < b < a \text{) (h.3.10)}.$$

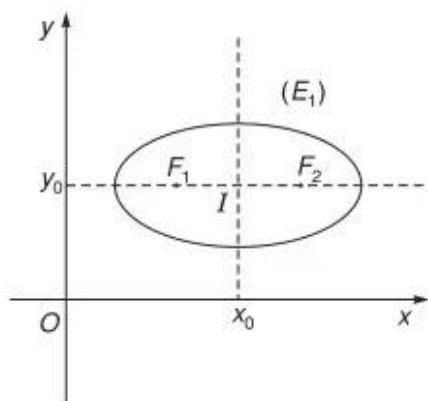


Hình 3.10

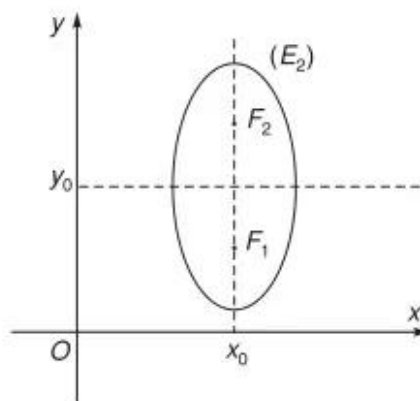
2. Phương trình của elip có tâm $I(x_0; y_0)$ và có các trục đối xứng cùng phương với các trục toạ độ :

$$(E_1) : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a) \text{ (h.3.11)}$$

$$(E_2) : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \quad (0 < b < a) \text{ (h.3.12).}$$



Hình 3.11



Hình 3.12