§3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. MỤC ĐÍCH

1. Cho số k và vectơ $\vec{a}$ biết dựng vectơ $k\vec{a}$. Nắm được các tính chất của phép nhân vectơ với một số (hay phép nhân một số với một vectơ).

2. Sử dụng được điều kiện cần và đủ của hai vectơ cùng phương :

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ Có số k để $\vec{a} = k\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$.

3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và $\vec{x}$ là vectơ tuỳ ý.

Biết tìm hai số h và k sao cho $\vec{x} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

B. NỘI DUNG

1. Phép nhân một số với một vectơ là một ánh xạ từ $/ \times V$ vào V, trong đó $/$ là tập các số thực. Tuy nhiên phép nhân một số với một vectơ vẫn có các tính chất tương tự phép nhân của các số. Trên tập hợp $/$ các số thực đã có các phép toán đại số là phép cộng hai số thực và phép nhân hai số thực. Tính chất của phép nhân một số với một vectơ cho ta biết mối liên hệ giữa phép nhân một số với một vectơ với phép cộng trong V, phép cộng và phép nhân trong $/$.

Chú ý rằng hai khái niệm "tích của vectơ với một số" và "tích của một số với một vectơ" được hiểu như nhau.

Trong vật lí ta cũng gặp khái niệm nhân một số với một vectơ. Nếu một vật có khối lượng m chịu tác động của một lực $\vec{F}$ thì nó thu được gia tốc $\vec{a}$ tính theo công thức $\vec{a} = \dfrac{1}{m}\vec{F}$.

2. Hoạt động 1 nhằm dẫn dắt đến khái niệm phép nhân một số với một vectơ. Vectơ $k\vec{a}$ có độ dài là $|k||\vec{a}|$ và hướng phụ thuộc vào dấu của k.

Hoạt động 2 nhằm làm cho học sinh biết cách sử dụng các tính chất đã thừa nhận của phép toán nhân một số với một vectơ. Vectơ đối của $k\vec{a}$ là $-k\vec{a}$. Vectơ đối của $3\vec{a} - 4\vec{b}$ là

$$(-1)(3\vec{a} - 4\vec{b}) = (-1)(3\vec{a}) + (-1)[(-4)\vec{b}] = -3\vec{a} + 4\vec{b}.$$

3. Các điều kiện nêu trong phần áp dụng của việc nhân một số với một vectơ thực ra là các điều kiện cần và đủ. Giáo viên có thể yêu cầu chứng minh các điều ngược lại :

a) Nếu $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}, \forall M$ thì I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Nếu $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}, \ \forall M$ thì G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có thể chứng minh các điều kiện cần và đủ đó bằng cách sử dụng các điều kiện cần và đủ đã cho trong mục 5 của §2 và quy tắc ba điểm của phép cộng.

• I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$$

• G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$$

4. Bài toán phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương là bài toán ngược của bài toán tính tổng của hai vectơ theo quy tắc hình bình hành. Hai vectơ không cùng phương là một cơ sở của không gian các vectơ trên mặt phẳng. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì $h\vec{a}+k\vec{b}=\vec{0}$ khi và chỉ khi $h=k=0$. Thật vậy, nếu $h\vec{a}+k\vec{b}=\vec{0}$ thì $h\vec{a}=-k\vec{b}$. Nếu $h\neq 0$, suy ra $\vec{a}=-\dfrac{k}{h}\vec{b}$ và do đó $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương, vô lí. Vậy $h=0$ và $k=0$. Điều ngược lại là hiển nhiên do định nghĩa. Có thể yêu cầu học sinh chứng minh điều này. Do đó mỗi vectơ $\vec{x}$ trong mặt phẳng đều có thể biểu thị tuyến tính qua các vectơ cơ sở, có nghĩa là $\vec{x}=h\vec{a}+k\vec{b}$ và h, k được xác định duy nhất. Trong SGK không dùng từ "biểu thị" mà dùng từ "phân tích" cho dễ hiểu.

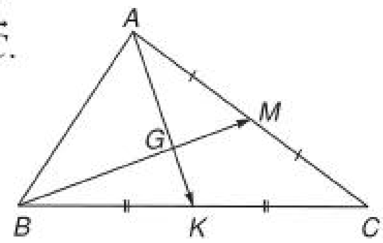
5. Biết sử dụng điều kiện cùng phương của hai vectơ để chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc chứng minh hai đường thẳng song song với nhau.

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}.$

2. (h.1.9)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}(\vec{u}-\vec{v}).$$

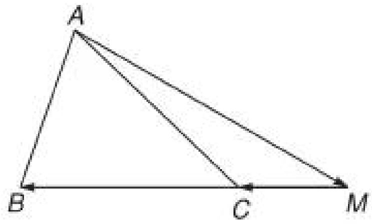


Hình 1.9

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$$
$$= 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) - \overrightarrow{AB}$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}\right) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v}.$$
$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) - \left(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v}\right) = -\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}.$$

3. (h.1.10)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{u} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \vec{u} + \frac{3}{2}\left(\vec{v} - \vec{u}\right) = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}.$$

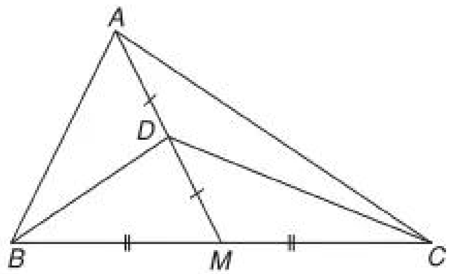


Hình 1.10

4. (h.1.11)

a) $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DM}$
$$= 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}\right) = 2.\vec{0} = \vec{0}.$$

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}$
$$= 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}\right)$$
$$= 2(2.\overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{OD}.$$

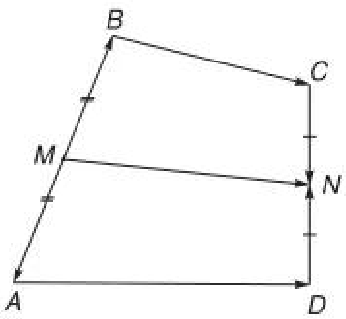


Hình 1.11

5. (h.1.12)

$$+\begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \\ \hline 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \end{array}$$

$$+\begin{array}{l} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \hline 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \end{array}$$



Hình 1.12

6. $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow\ 5\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{KA}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}\ \text{(h.1.13).}$$

Hình 1.13

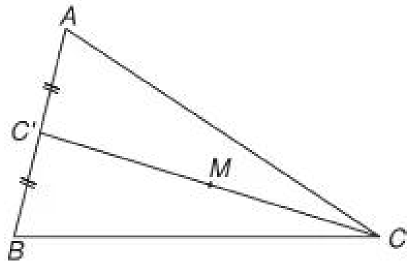
7. Gọi C' là trung điểm của AB, ta có :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MC'}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (h.1.14).

Vậy điểm M là trung điểm của trung tuyến CC'.



Hình 1.14

8. Gọi G là trọng tâm tam giác MPR và G' là trọng tâm tam giác NQS. Ta có

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}\right)=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'Q}+\overrightarrow{G'S}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}\right)=\vec{0}.$$

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}+\overrightarrow{G'E}+\overrightarrow{G'F}$

$\Rightarrow\ 6\overrightarrow{GG'}=\vec{0}\ \Rightarrow G\equiv G'$.

9. Qua M kẻ các đường thẳng sau :

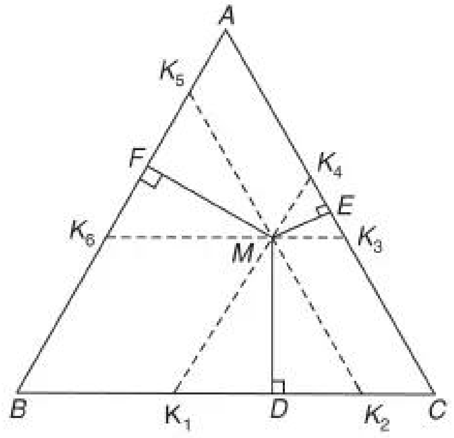
$K_1K_4\ //\ AB$, $K_2K_5\ //\ AC$, $K_3K_6\ //\ BC$ (K_1, $K_2\in BC$; $K_3, K_4\in AC$; $K_5, K_6\in AB$) (h.1.15). Ta có

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}+\overrightarrow{MK_4}+\overrightarrow{MK_5}+\overrightarrow{MK_6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$$

(vì MK_5AK_4, MK_3CK_2, MK_1BK_6 là các hình bình hành). Vậy :

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}.3\overrightarrow{MO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$



Hình 1.15