§4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. MỤC ĐÍCH

1. Biểu diễn các điểm và các vectơ bằng các cặp số trong hệ trục toạ độ đã cho. Ngược lại xác định được điểm A và vectơ $\vec{u}$ khi cho biết toạ độ của chúng.

2. Biết tìm toạ độ các vectơ $\vec{u} + \vec{u'}$, $\vec{u} - \vec{u'}$, $k\vec{u}$ khi biết toạ độ các vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$ và số k.

3. Biết sử dụng công thức toạ độ trung điểm của một đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm một tam giác.

B. NỘI DUNG

1. Hệ trục toạ độ trong mặt phẳng là công cụ để xác định vị trí các điểm trên mặt phẳng. Nhờ hệ trục toạ độ ta định nghĩa được toạ độ của một vectơ và như vậy các vectơ bằng nhau đều có cùng một toạ độ. Do đó một lớp các vectơ bằng nhau được xác định bởi một cặp số có thứ tự được gọi là toạ độ của vectơ đại diện cho lớp đó.

2. Để xây dựng khái niệm hệ toạ độ và toạ độ của một điểm trên mặt phẳng, SGK đưa ra hai trường hợp để dẫn dắt. Đó là xác định vị trí một điểm trên mặt địa cầu thông qua cặp số chỉ kinh độ, vĩ độ và xác định vị trí một quân cờ trên bàn cờ vua nhờ một cặp kí hiệu.

Dựa vào hệ trục toạ độ, người ta xác định được vị trí của các điểm trên mặt phẳng.

3. Khái niệm toạ độ của một vectơ được xây dựng bằng cách phân tích vectơ đó qua hai vectơ đơn vị trên hai trục. Trước khi xây dựng khái niệm này cho học sinh thực hiện hoạt động 2. Kết quả là

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{b} = 0.\vec{i} + (-4)\vec{j}.$$

4. Khái niệm toạ độ của một điểm M suy ra từ toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Hoạt động 3 nhằm củng cố cách xác định toạ độ của một điểm. Từ hình vẽ ta có $A(4 ; 2)$, $B(-3 ; 0)$, $C(0 ; 2)$.

Chứng minh công thức liên hệ giữa toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm rất đơn giản. Vì vậy hoạt động 4 yêu cầu chứng minh công thức đó để luyện tập về toạ độ của điểm và toạ độ của vectơ.

Từ $A(x_A; y_A)$ suy ra $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Tương tự, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$. Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - \left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}\right) = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$. Do đó, theo định nghĩa toạ độ vectơ, ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

5. SGK đã bỏ qua chứng minh các công thức về toạ độ của $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ và $k\vec{u}$. Đó là các công thức cần ghi nhớ và việc chứng minh chúng cũng rất đơn giản.

Chẳng hạn, nếu $\vec{u} = (x ; y)$, $\vec{u'} = (x' ; y')$ thì $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{u'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Suy ra
$$\vec{u} + \vec{u'} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$$
$$\vec{u} - \vec{u'} = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j}$$
$$k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = (kx)\vec{i} + (ky)\vec{j}.$$

Hoạt động 5 yêu cầu chứng minh công thức toạ độ của trọng tâm tam giác. Việc chứng minh này giúp học sinh ôn tập và khắc sâu các công thức về toạ độ. Cách chứng minh như sau :

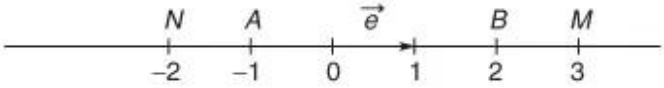
Từ hệ thức $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ ta suy ra

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\vec{i} + \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\vec{j}.$$

Vậy G có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

C. HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a)



Hình 1.16

b) $\overline{AB} = 2 - (-1) = 3$, $\overline{MN} = -2 - 3 = -5$

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng.

2. a) Đúng vì $\vec{a} = -3\vec{i}$.

b) Đúng vì $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow -\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow -\vec{a} = (-3\,;-4)$.

c) Sai.

d) Đúng.

3. a) $\vec{a} = (2\,;0)$.

b) $\vec{b} = (0\,;-3)$.

c) $\vec{c} = (3\,;-4)$.

d) $\vec{d} = (0{,}2\,;\sqrt{3})$.

4. Các khẳng định *a)* , *b)* , *c)* đúng. d) sai.

5. M có toạ độ là $(x_0\,;y_0)$ thì toạ độ của A, B, C là :

a) $A(x_0\,;-y_0)$.

b) $B(-x_0\,;y_0)$.

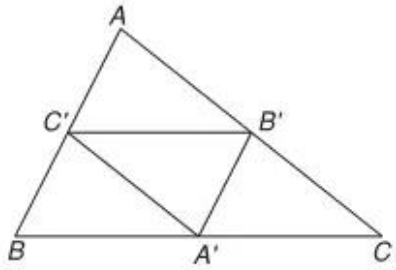
c) $C(-x_0\,;-y_0)$.

6. $\overrightarrow{AB} = (4\,;4)$. Gọi $D(x\,;y)$ thì $\overrightarrow{DC} = (4-x\,;-1-y)$.

Vì $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases} 4-x=4 \\ -1-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-5. \end{cases}$

Vậy D có toạ độ là $(0\,;-5)$.

7.



Hình 1.17

$$\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \begin{cases} x_A - 2 = 6 \\ y_A + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 8 \\ y_A = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{C'B'} \Rightarrow \begin{cases} -4 - x_B = 0 \\ 1 - y_B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -4 \\ y_B = -5 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{C'B'} \Rightarrow \begin{cases} x_C + 4 = 0 \\ y_C - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -4 \\ y_C = 7. \end{cases}$$

Toạ độ của trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là $G'(0\ ;\ 1)$ và toạ độ của trọng tâm tam giác ABC là $G(0\ ;\ 1)$.

Vậy $G \equiv G'$.

8. Giả sử $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$. Khi đó

$$\begin{cases} 2h + k = 5 \\ -2h + 4k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \\ k = 1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.