HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. $\left(\vec{a}+m\vec{b}\right).\left(\vec{a}-m\vec{b}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{a}^2-m^2\vec{b}^2=0 \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{3}{5}.$

2. b) $\alpha=\beta$ và $\alpha\neq 1$.

3. a) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có :

$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2=MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}.$$

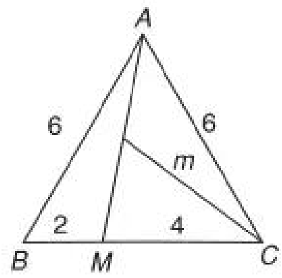
Ta có biểu thức tương tự của MB^2, MC^2. Do đó

$$MA^2+MB^2+MC^2=$$
$$3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=2a^2$$

$\left(\text{vì } \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \text{ và } GA^2=GB^2=GC^2=MG^2=\dfrac{a^2}{3}\right).$

b) N là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của tam giác ABC lên d.

4. a) Xét tam giác ABM (h.3.21) :



Hình 3.21

• Theo định lí côsin ta có :

$$AM^2=AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos 60^\circ$$
$$=6^2+2^2-2.6.2.\frac{1}{2}=36+4-12=28.$$

Vậy $AM=\sqrt{28}$ (cm).

$$\cos\widehat{BAM}=\frac{AM^2+AB^2-BM^2}{2AM.AB}=\frac{28+36-4}{2.\sqrt{28}.6}=\frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

b) Xét tam giác ABM, theo định lí sin ta có : $\dfrac{AM}{\sin B}=2R=\dfrac{\sqrt{28}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}.$

Vậy $R=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ (cm).

c) Gọi m là độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh C của tam giác ACM. Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác ta có :

$$m^2=\frac{AC^2+MC^2}{2}-\frac{AM^2}{4}=\frac{6^2+4^2}{2}-\frac{28}{4}=\frac{52}{2}-7=19.$$

Vậy $m = \sqrt{19}$ (cm).

d) Gọi S là diện tích tam giác ABM

$$S = \frac{1}{2}BA.BM.\sin B = \frac{1}{2}.6.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Vậy $\qquad S = 3\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$

Có thể dùng công thức Hê-rông để tính S.

5. a) $b\cos C + c\cos B = \dfrac{b(a^2+b^2-c^2)}{2ab} + \dfrac{c(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a} = a.$$

b) Theo câu a) ta có : $a = b\cos C + c\cos B.$ (1)

Theo định lí hàm số sin ta có : $a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C.$

Thay các giá trị này của a, b, c vào (1) ta có ;

$$2R\sin A = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \sin B\cos C + \sin C\cos B.$$

c) Theo công thức tính diện tích tam giác ABC ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}bc\sin A. \qquad (2)$$

Thay $a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$ vào (2) ta có :

$$\frac{1}{2}2R\sin A\,h_a = \frac{1}{2}2R\sin B.2R\sin C.\sin A \Leftrightarrow h_a = 2\text{R}\sin B\sin C.$$

6. a) Ta có $A = (2\,;3), B = (9\,;4), M = (5\,;y), P = (x\,;2)$ (h.3.22).

$$\overrightarrow{AM} = (3\,;\ y-3)$$

$$\overrightarrow{BM} = (-4\,;\ y-4) \text{ và}$$

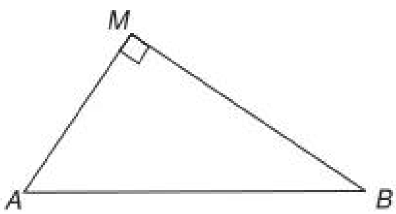
Tam giác AMB vuông tại M

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3.(-4) + (y-3)(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -12 + y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 7. \end{array}\right.$$



Hình 3.22

b) Ta có $\overrightarrow{AP} = (x-2\,;-1)$

$\overrightarrow{AB} = (7\,;1)$.

Ta có : A, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow (x-2).1-(7).(-1)=0 \Leftrightarrow x-2+7=0 \Leftrightarrow x=-5.$$

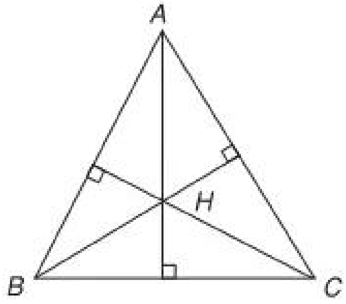
7. Tìm toạ độ các giao điểm A, B, H ta được :

$$A=\left(\frac{5}{2}\,;2\right),\ B=(3\,;0),\ H=\left(\frac{11}{3}\,;\ \frac{5}{6}\right) \text{ (h.3.23).}$$

Ta có : $AC \perp BH \Leftrightarrow AC : 4x+5y+c_1=0$;

$A \in AC \Leftrightarrow 10+10+c_1=0$

$\Leftrightarrow c_1=-20.$



Hình 3.23

Vậy phương trình đường thẳng AC là :

$4x+5y-20=0.$

Ta có : $BC \perp AH \Leftrightarrow BC : x-y+c_2=0$;

$B \in BC \Leftrightarrow 3+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-3.$

Vậy phương trình đường thẳng BC là : $x-y-3=0.$

Ta có : $CH \perp AB \Leftrightarrow CH : x-4y+c_3=0$;

$$H \in CH \Leftrightarrow \frac{11}{3}-\frac{10}{3}+c_3=0 \Leftrightarrow c_3=-\frac{1}{3}.$$

Vậy phương trình đường thẳng CH là : $x-4y-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow 3x-12y-1=0.$

8. Xét đường tròn $(\mathcal{C})$ có phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Ta có : $I(a\,;b) \in \Delta \Leftrightarrow 4a+3b-2=0.$ (1)

Ta có : $(\mathcal{C})$ tiếp xúc với d_1 và $d_2 \Leftrightarrow d(I, d_1)=d(I, d_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+b+4|}{\sqrt{2}}=\frac{|7a-b+4|}{\sqrt{50}}$$

$$\Leftrightarrow 5|a+b+4|=|7a-b+4|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-6b-16=0 \\ 12a+4b+24=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a-3b-8=0 & (2) \\ 3a+b+6=0. & (3) \end{array}\right.$$

Trường hợp 1.

Giải hệ (1) và (2) ta được $a = 2$ và $b = -2$, suy ra $R = 2\sqrt{2}$.

Trường hợp 2.

Giải hệ (1) và (3) ta được $a = -4$, $b = 6$, suy ra $R = 3\sqrt{2}$.

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài :

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

$$(x+4)^2 + (y-6)^2 = 18.$$

9. Ta có $(E) : \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

a) $a = 10, b = 6$

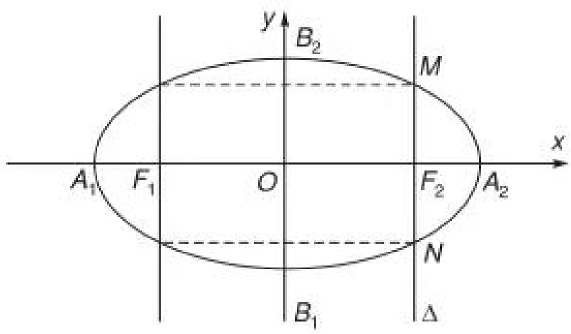
$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64,$

$c = 8.$

(E) có các đỉnh :

$A_1(-10 ; 0)$, $A_2(10 ; 0)$,

$B_1(0 ; -6)$, $B_2(0 ; 6)$ (h.3.24).



Hình 3.24

Tiêu điểm : $F_1(-8 ; 0)$, $F_2(8 ; 0)$.

b) Đường thẳng Δ đi qua $F_2\,(8 ; 0)$ và song song với Oy có phương trình : $x = 8$.

Ta có tung độ giao điểm của (E) và Δ là nghiệm của phương trình :

$$\frac{64}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow y = \pm\frac{18}{5}.$$

Vậy : $\quad MN = |y_M - y_N| = \dfrac{36}{5}.$