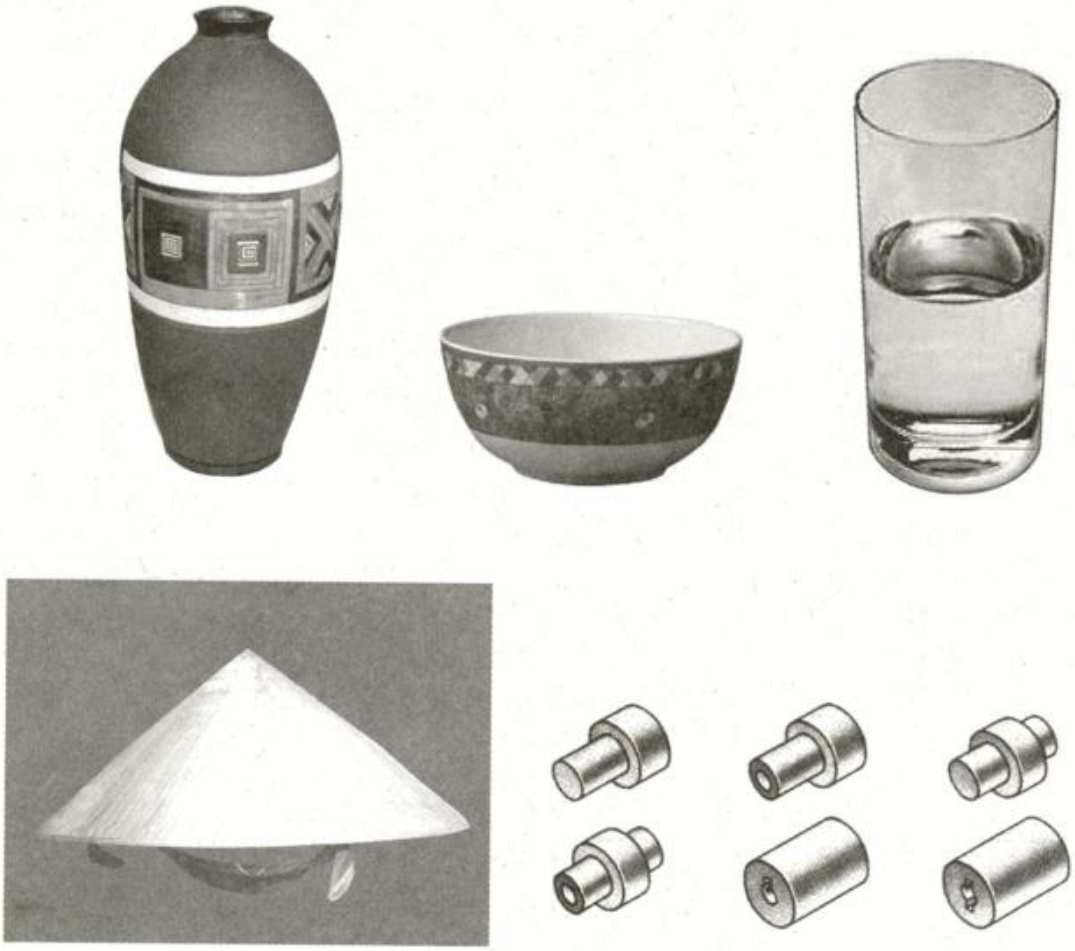
§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

I- SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY

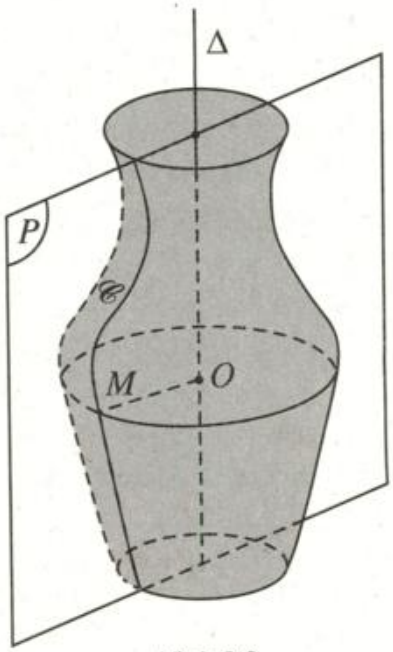
Xung quanh chúng ta có nhiều vật thể mà mặt ngoài có hình dạng là những mặt tròn xoay như bình hoa, nón lá, cái bát (chén) ăn cơm, cái cốc (li) uống nước, một số chi tiết máy (h.2.1)... Nhờ có bàn xoay với sự khéo léo của đôi bàn tay, người thợ gốm có thể tạo nên những vật dụng có dạng tròn xoay bằng đất sét. Dựa vào sự quay tròn của trục máy tiện, người thợ cơ khí có thể tạo nên những chi tiết máy bằng kim loại có dạng tròn xoay. Vậy các mặt tròn xoay được hình thành như thế nào ? Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu những tính chất hình học của mặt tròn xoay.



Hình 2.1

Trong không gian cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và một đường $\mathscr{C}$. Khi quay mặt phẳng (P) quanh Δ một góc 360° thì mỗi điểm M trên đường $\mathscr{C}$ vạch ra một đường tròn có tâm O thuộc Δ và nằm trên mặt phẳng vuông góc với Δ. Như vậy khi quay mặt phẳng (P) quanh đường thẳng Δ thì đường $\mathscr{C}$ sẽ tạo nên một hình được gọi là *mặt tròn xoay* (h.2.2).

Đường $\mathscr{C}$ được gọi là *đường sinh* của mặt tròn xoay đó. Đường thẳng Δ được gọi là *trục* của mặt tròn xoay.



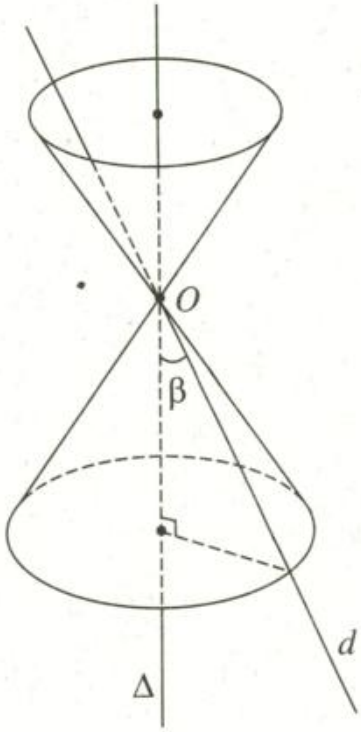
Hình 2.2

1 Hãy nêu tên một số đồ vật mà mặt ngoài có hình dạng là các mặt tròn xoay.

II- MẶT NÓN TRÒN XOAY

1. Định nghĩa

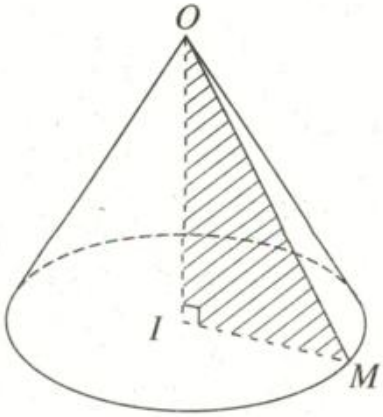
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo thành góc β với $0^o < \beta < 90^o$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O. Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón. Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón đó (h.2.3).



Hình 2.3

2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay

a) Cho tam giác OIM vuông tại I (h.2.4). Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là *hình nón tròn xoay*, gọi tắt là *hình nón*.



Hình 2.4

Hình tròn tâm I sinh bởi các điểm thuộc cạnh IM khi IM quay quanh trục OI được gọi là *mặt đáy* của hình nón, điểm O gọi là *đỉnh* của hình nón. Độ dài đoạn OI gọi là *chiều cao* của hình nón, đó cũng là khoảng cách từ O đến mặt phẳng đáy. Độ dài đoạn OM gọi là độ dài *đường sinh* của hình nón. Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh trục OI gọi là *mặt xung quanh* của hình nón đó.

b) *Khối nón tròn xoay* là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Người ta còn gọi tắt khối nón tròn xoay là *khối nón*. Những điểm không thuộc khối nón được gọi là những *điểm ngoài* của khối nón. Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón ứng với khối nón ấy được gọi là những *điểm trong* của khối nón. Ta gọi đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón theo thứ tự là *đỉnh, mặt đáy, đường sinh* của khối nón tương ứng.

3. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay

a) Một hình chóp được gọi là *nội tiếp* một hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đường tròn đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón. Khi đó ta còn nói hình nón *ngoại tiếp* hình chóp. Ta có định nghĩa sau :

> *Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

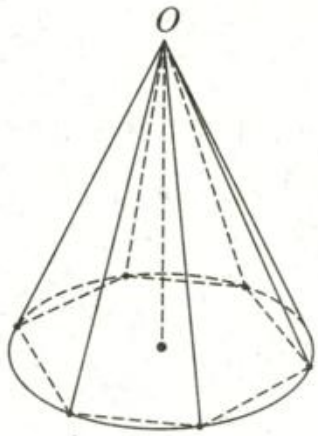
b) *Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón*

Gọi p là chu vi đáy của hình chóp đều nội tiếp hình nón và q là khoảng cách từ đỉnh O tới một cạnh đáy của hình chóp đều đó thì diện tích xung quanh của hình chóp đều là $S_{xq} = \frac{1}{2}pq$. (h.2.5)

Khi cho số cạnh đáy của hình chóp đều tăng lên vô hạn thì p có giới hạn là độ dài đường tròn đáy bán kính r của hình nón, q có giới hạn là độ dài đường sinh l của hình nón. Khi đó ta tính được diện tích xung quanh của hình nón theo công thức :

$$\boxed{S_{xq} = \pi r l}$$

Vậy : *Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay bằng một nửa tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.*

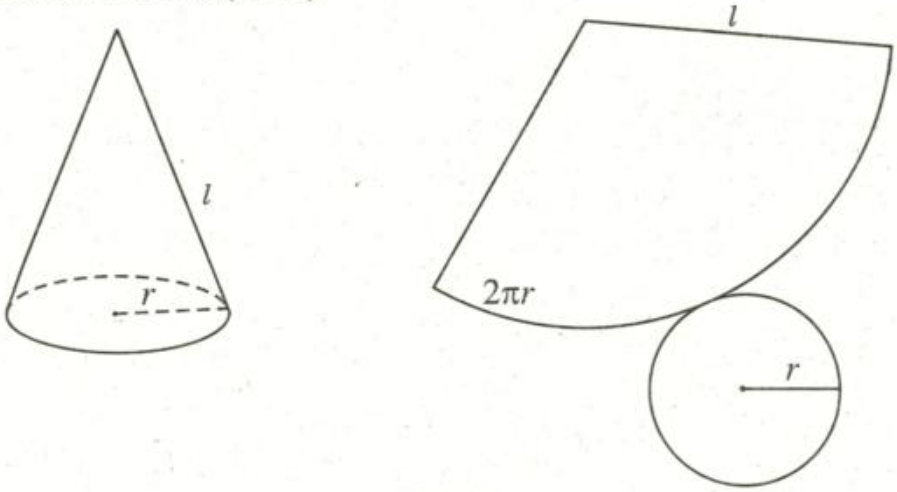


Hình 2.5

Người ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là *diện tích toàn phần* của hình nón.

☞ ***Chú ý.*** Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay cũng là diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của khối nón được giới hạn bởi hình nón đó.

Nếu cắt mặt xung quanh của hình nón tròn xoay theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta sẽ được một hình quạt có bán kính bằng độ dài đường sinh của hình nón và một cung tròn có độ dài bằng chu vi đường tròn đáy của hình nón. Ta có thể xem diện tích hình quạt này là diện tích xung quanh của hình nón. (h.2.6)



Hình 2.6

4. Thể tích khối nón tròn xoay

a) Muốn tính thể tích khối nón tròn xoay ta dựa vào định nghĩa sau đây :

> *Thể tích của khối nón tròn xoay là giới hạn của thể tích khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) *Công thức tính thể tích khối nón tròn xoay*

Ta biết rằng thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ tích của diện tích đa giác đáy và chiều cao của khối chóp đó (chiều cao này cũng là chiều cao của khối nón). Khi cho số cạnh đáy của khối chóp đều tăng lên vô hạn thì diện tích đa giác đáy của khối chóp đều đó có giới hạn là diện tích hình tròn đáy của khối nón tròn xoay. Do đó ta tính được thể tích của khối nón tròn xoay *như sau :*

Gọi V là thể tích của khối nón tròn xoay có diện tích đáy B và chiều cao h, ta có công thức :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Bh}$$

Như vậy, nếu bán kính đáy bằng r thì $B = \pi r^2$, khi đó : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

5. Ví dụ

Trong không gian cho tam giác vuông OIM vuông tại I, góc $\widehat{IOM} = 30^o$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay đó.

b) Tính thể tích của khối nón tròn xoay được tạo nên bởi hình nón tròn xoay nói trên.

Giải

a) Hình nón tròn xoay được tạo nên có bán kính đáy là a và có độ dài đường sinh $OM = 2a$.

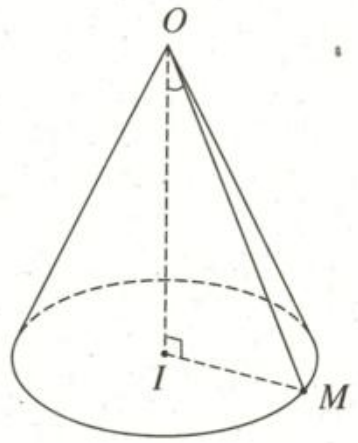
Vậy diện tích xung quanh của hình nón là :

$S_{xq} = \pi rl = \pi a.2a = 2\pi a^2$ (h.2.7).

b) Khối nón tròn xoay có chiều cao $h = OI = a\sqrt{3}$ và có diện tích hình tròn đáy là πa^2.

Vậy khối nón tròn xoay có thể tích là :

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$



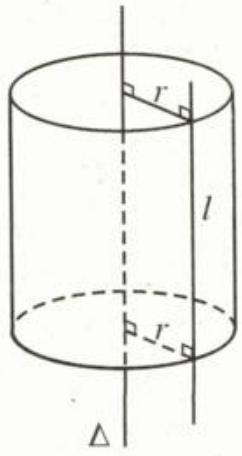
Hình 2.7

2 Cắt mặt xung quanh của một hình nón tròn xoay dọc theo một đường sinh rồi trải ra trên mặt phẳng ta được một nửa hình tròn bán kính R. Hỏi hình nón đó có bán kính r của đường tròn đáy và góc ở đỉnh của hình nón bằng bao nhiêu ?

III- MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay. Người ta thường gọi tắt mặt trụ tròn xoay là mặt trụ. Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng l là đường sinh và r là bán kính của mặt trụ đó (h.2.8).

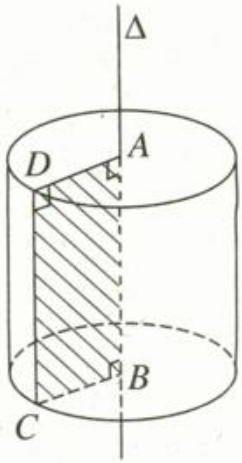


Hình 2.8

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

a) Ta hãy xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB, thì đường gấp khúc $ADCB$ tạo thành một hình được gọi là *hình trụ tròn xoay* hay còn được gọi tắt là *hình trụ* (h.2.9).

Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là *hai đáy* của hình trụ, bán kính của chúng gọi là *bán kính* của hình trụ. Độ dài đoạn CD gọi là độ dài *đường sinh* của hình trụ, phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay quanh AB gọi là *mặt xung quanh* của hình trụ. Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là *chiều cao của hình trụ*.



Hình 2.9

b) *Khối trụ tròn xoay* là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó. Khối trụ tròn xoay còn được gọi tắt là *khối trụ*. Những điểm không thuộc khối trụ được gọi là những *điểm ngoài* của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ gọi là những *điểm trong* của khối trụ. Ta gọi mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ theo thứ tự là *mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính* của khối trụ tương ứng.

Các chi tiết máy có dạng hình trụ

3. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay

a) Một hình lăng trụ gọi là *nội tiếp* một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ. Khi đó ta còn nói hình trụ *ngoại tiếp* hình lăng trụ. Ta có định nghĩa sau :

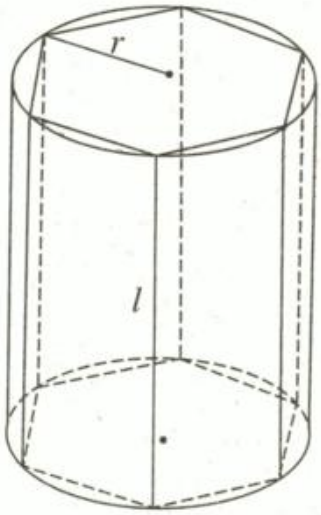
> *Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) *Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ*

Gọi p là chu vi đáy của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ và h là chiều cao của hình lăng trụ đó thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều là : $S_{xq} = ph$ (h.2.10).

Khi cho số cạnh đáy của hình lăng trụ đều tăng lên vô hạn thì p có giới hạn là chu vi hình tròn đáy bán kính r của hình trụ, chiều cao h bằng độ dài đường sinh l của hình trụ. Khi đó ta tính được diện tích xung quanh của hình trụ theo công thức :

$$\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$$



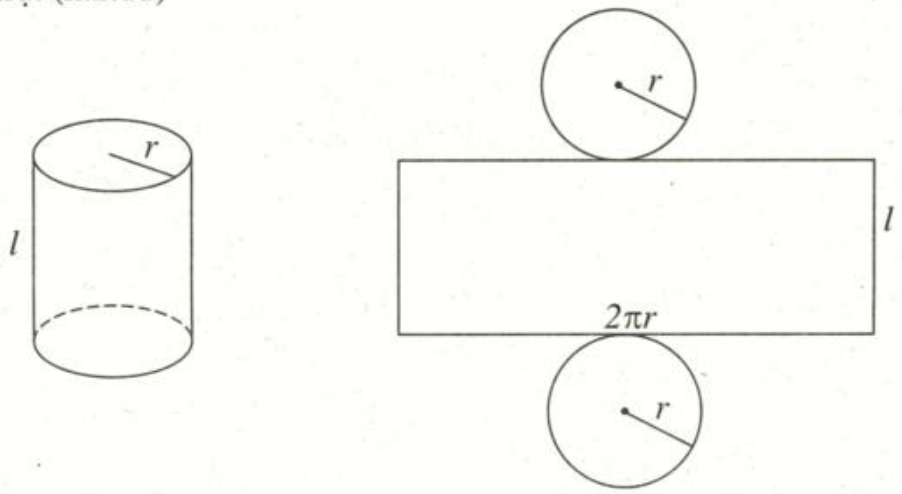
Hình 2.10

Vậy : *Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay bằng tích của độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh.*

Người ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai đáy là *diện tích toàn phần* của hình trụ.

☞ ***Chú ý.*** Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay cũng là diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đó.

Nếu cắt mặt xung quanh của hình trụ theo một đường sinh, rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta sẽ được một hình chữ nhật có một cạnh bằng đường sinh l và một cạnh bằng chu vi của đường tròn đáy. Độ dài đường sinh l bằng chiều cao h của hình trụ. Khi đó diện tích hình chữ nhật bằng diện tích xung quanh của hình trụ. (h.2.11)



Hình 2.11

4. Thể tích khối trụ tròn xoay

a) Muốn tính thể tích khối trụ tròn xoay ta dựa vào định nghĩa sau đây :

> *Thể tích của khối trụ tròn xoay là giới hạn của thể tích khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.*

b) *Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay*

Ta biết rằng thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích đa giác đáy và chiều cao của khối lăng trụ đó. Khi cho số cạnh đáy của khối lăng trụ đều tăng lên vô hạn thì diện tích của đa giác đáy của khối lăng trụ đều có giới hạn là diện tích của hình tròn đáy của khối trụ tròn xoay. Do đó ta tính được thể tích của khối trụ tròn xoay như sau :

Gọi V là thể tích của khối trụ tròn xoay có diện tích đáy B và chiều cao h, ta có công thức :

$$\boxed{V = Bh}$$

Như vậy, nếu bán kính đáy bằng r thì $B = \pi r^2$, khi đó : $V = \pi r^2 h$.

3 Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* cạnh *a*. Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai hình vuông *ABCD* và *A'B'C'D'*.

5. Ví dụ

Trong không gian, cho hình vuông *ABCD* cạnh *a*. Gọi *I* và *H* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB* và *CD*. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục *IH* ta được một hình trụ tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay đó.

b) Tính thể tích của khối trụ tròn xoay được giới hạn bởi hình trụ nói trên.

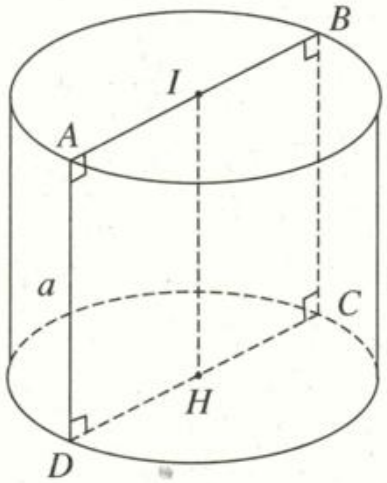
Giải

a) Hình trụ tròn xoay có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$ và đường sinh $l = a$. Do đó diện tích xung quanh của hình trụ là :

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \frac{a}{2} \cdot a = \pi a^2 \text{ (h.2.12).}$$

b) Thể tích của khối trụ tròn xoay được tính theo công thức :

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 .a = \frac{1}{4}\pi a^3 .$$



Hình 2.12

BÀI TẬP

1. Cho đường tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P). Từ những điểm M thuộc đường tròn này ta kẻ những đường thẳng vuông góc với (P). Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay. Hãy xác định trục và bán kính của mặt trụ đó.

2. Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy gọi tên các hình tròn xoay hoặc khối tròn xoay sinh ra bởi :

a) Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

b) Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó.

c) Một tam giác vuông kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

d) Một hình chữ nhật kể cả các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

3. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

b) Tính thể tích của khối nón được tạo thành bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích thiết diện đó.

4. Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và có độ dài $AB = 20$ cm. Gọi d là một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một khoảng bằng 10 cm. Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn luôn nằm trên một mặt nón, hãy xác định trục và góc ở đỉnh của mặt nón đó.

5. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ cm và có khoảng cách giữa hai đáy bằng 7 cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

6. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.

7. Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{3}$.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng 30°. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

8. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O\ ;\ r)$ và $(O'\ ;\ r)$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn $(O\ ;\ r)$.

a) Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón, hãy tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, hãy tính tỉ số thể tích hai phần đó.

9. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

10. Cho hình trụ có bán kính r và có chiều cao cũng bằng r. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC và AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính diện tích của hình vuông đó và côsin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.