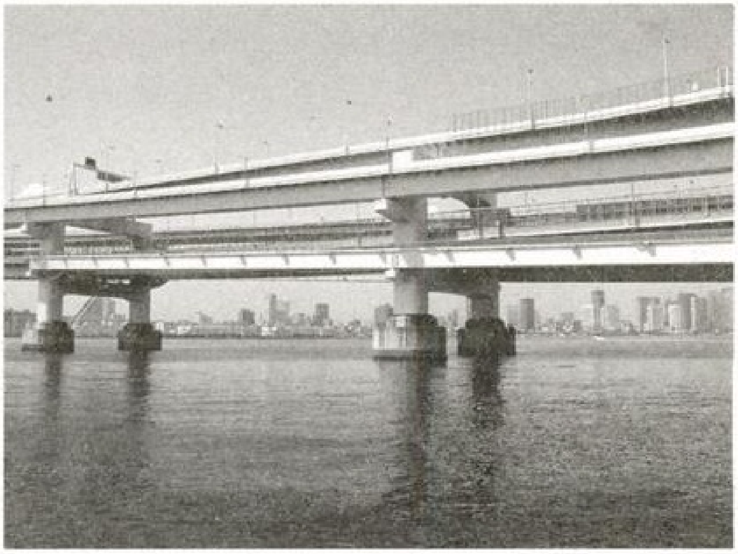
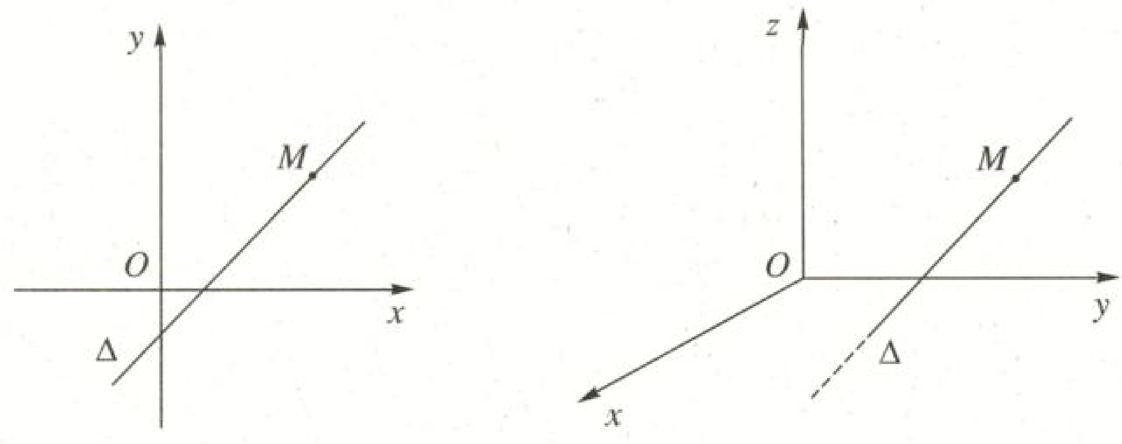
§3. PHƯƠNG TRÌNH
ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Hình ảnh của các đường thẳng trong không gian – các cầu vượt trong thành phố và qua sông

Ta đã biết trong hệ trục toạ độ Oxy phương trình tham số của đường thẳng có dạng $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$ với $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ (h.3.14a).

Như vậy trong không gian $Oxyz$ phương trình của đường thẳng có dạng như thế nào ? (h.3.14b)



a) Đường thẳng trong mặt phẳng *b) Đường thẳng trong không gian*

Hình 3.14

I- PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

△1 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và hai điểm $M_1(1 + t ; 2 + t ; 3 + t)$, $M_2(1 + 2t ; 2 + 2t ; 3 + 2t)$ di động với tham số t. Hãy chứng tỏ ba điểm M_0, M_1, M_2 luôn thẳng hàng.

Định lí

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ làm vectơ chỉ phương. Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ nằm trên Δ là có một số thực t sao cho

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

Chứng minh

Ta có : $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0)$.

Điểm M nằm trên Δ khi và chỉ khi $\overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{a}$, nghĩa là $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ với t là một số thực. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1 \\ y - y_0 = ta_2 \\ z - z_0 = ta_3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$$

Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ là phương trình có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

trong đó t là tham số.

☞ ***Chú ý.*** Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì người ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ dưới *dạng chính tắc* như sau :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Ví dụ 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1 ; 2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1 ; -4 ; -5)$.

Giải

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$

Ví dụ 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB với $A(1 ; -2 ; 3)$ và $B(3 ; 0 ; 0)$.

Giải

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2 ; -3)$.

Phương trình tham số của AB là : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$

Ví dụ 3. Chứng minh đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 4y + 6z + 9 = 0$.

Giải

d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1 ; 2 ; 3)$;

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2 ; 4 ; 6)$.

Ta có $\vec{n} = 2\vec{a}$, suy ra $d \perp (\alpha)$.

2 Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

Hãy tìm toạ độ của một điểm M trên Δ và toạ độ một vectơ chỉ phương của Δ.

II- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT NHAU, CHÉO NHAU

3 Cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là

$$d : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 5 + 2t'. \end{cases}$$

a) Hãy chứng tỏ điểm $M(1 ; 2 ; 3)$ là điểm chung của d và d' ;

b) Hãy chứng tỏ d và d' có hai vectơ chỉ phương không cùng phương.

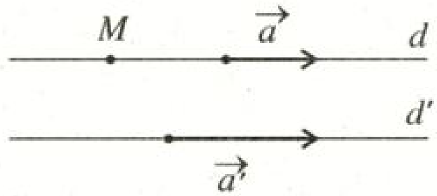
Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng d, d' có phương trình tham số lần lượt là

$$d:\begin{cases}x=x_0+ta_1\\y=y_0+ta_2\\z=z_0+ta_3\end{cases}\quad \text{và}\quad d':\begin{cases}x=x'_0+t'a'_1\\y=y'_0+t'a'_2\\z=z'_0+t'a'_3.\end{cases}$$

Sau đây ta xét vị trí tương đối giữa d và d', nghĩa là xét điều kiện để d và d' song song, cắt nhau hoặc chéo nhau.

1. Điều kiện để hai đường thẳng song song

Gọi $\vec{a}=(a_1\,;a_2\,;a_3)$ và $\vec{a}'=(a'_1\,;a'_2\,;a'_3)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d và d'. Lấy điểm $M(x_0\,;y_0\,;z_0)$ trên d (h.3.15).



Hình 3.15

Ta có :

d song song với d' khi và chỉ khi $\begin{cases}\vec{a}=k\vec{a}'\\M\notin d'.\end{cases}$

Đặc biệt :

d trùng với d' khi và chỉ khi $\begin{cases}\vec{a}=k\vec{a}'\\M\in d'.\end{cases}$

Ví dụ 1. Chứng minh hai đường thẳng sau đây song song :

$$d:\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=3-t\end{cases}\quad \text{và}\quad d':\begin{cases}x=2+2t'\\y=3+4t'\\z=5-2t'.\end{cases}$$

Giải

d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1\,;2\,;-1)$, lấy $M(1\,;0\,;3)\in d$;

d' có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(2\,;4\,;-2)$.

Vì $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}'$ và M không thuộc d' nên d song song với d'.

4 Chứng minh hai đường thẳng sau đây trùng nhau :

$$d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 5 + 3t' \\ z = 3 - 6t'. \end{cases}$$

2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình ẩn t, t' sau

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} \qquad (I)$$

có đúng một nghiệm.

☞ ***Chú ý.*** Giả sử hệ (I) có nghiệm $(t_0 ; t'_0)$, để tìm giao điểm M_0 của d và d' ta có thể thay t_0 vào phương trình tham số của d hoặc thay t'_0 vào phương trình tham số của d'.

Ví dụ 2. Tìm giao điểm của hai đường thẳng sau :

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -2 + t' \\ z = 1 + 3t'. \end{cases}$$

Giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1 + t = 2 - 2t' & (1) \\ 2 + 3t = -2 + t' & (2) \\ 3 - t = 1 + 3t' & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $t = -1$ và $t' = 1$. Thay vào phương trình (3) ta thấy nó thoả mãn. Vậy hệ phương trình trên có nghiệm là $t = -1$, $t' = 1$.

Suy ra d cắt d' tại điểm $M(0 ; -1 ; 4)$.

3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau

Ta biết rằng hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không cùng phương và không cắt nhau. Do vậy

Hai đường thẳng d và d' chéo nhau khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương và hệ phương trình

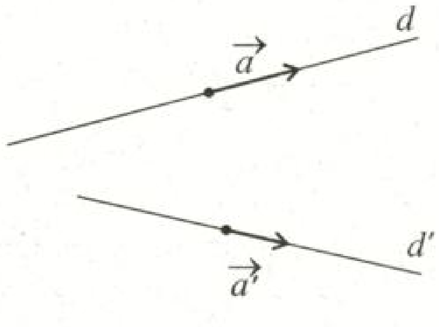
$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$

vô nghiệm.

Ví dụ 3. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t'. \end{cases}$$

Giải



Hình 3.16

Ta có : $\vec{a} = (2 ; 3 ; 1)$ và $\vec{a}' = (3 ; 2 ; 2)$.

Vì không tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{a}'$ nên $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương. Từ đó suy ra d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau (h.3.16).

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} 1 + 2t = 1 + 3t' \\ -1 + 3t = -2 + 2t' \\ 5 + t = -1 + 2t'. \end{cases}$

Từ hai phương trình đầu ta được $t = -\dfrac{3}{5}$ và $t' = -\dfrac{2}{5}$, thay vào phương trình cuối không thoả mãn.

Ta suy ra hệ trên vô nghiệm. Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Ví dụ 4. Chứng minh hai đường thẳng sau đây vuông góc

$$d:\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{và} \quad d':\begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 13 + 3t' \\ z = 1 - t'. \end{cases}$$

Giải

d và d' lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1 ; 2 ; 4)$ và $\vec{a}' = (2 ; 3 ; -1)$.

Ta có $\vec{a} . \vec{a}' = -2 + 6 - 4 = 0$.

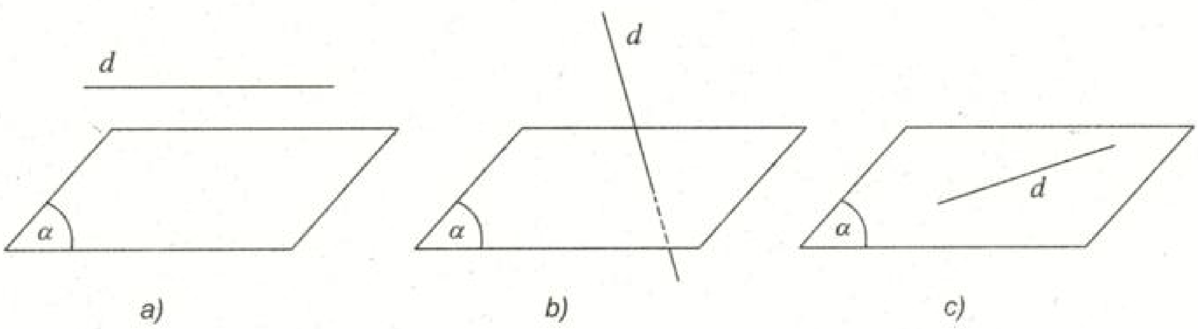
Suy ra $d \perp d'$.

Nhận xét. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$

và đường thẳng $d:\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3. \end{cases}$

Xét phương trình $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0$ (t là ẩn). (1)

– Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì d và (α) không có điểm chung, vậy $d \, // \, (\alpha)$ (h.3.17a).



Hình 3.17

– Nếu phương trình (1) có đúng một nghiệm $t = t_0$ thì d cắt (α) tại điểm $M_0(x_0 + t_0a_1 ; y_0 + t_0a_2 ; z_0 + t_0a_3)$ (h.3.17b).

– Nếu phương trình (1) có vô số nghiệm thì d thuộc (α) (h.3.17c).

△5 Tìm số giao điểm của mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 3 = 0$ với đường thẳng d trong các trường hợp sau :

a) $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 \end{cases}$; b) $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$; c) $d : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau :

a) d đi qua điểm $M(5 ; 4 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2 ; -3 ; 1)$;

b) d đi qua điểm $A(2 ; -1 ; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - z + 5 = 0$;

c) d đi qua điểm $B(2 ; 0 ; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$;

d) d đi qua hai điểm $P(1 ; 2 ; 3)$ và $Q(5 ; 4 ; 4)$.

2. Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

lần lượt trên các mặt phẳng sau :

a) (Oxy) ;

b) (Oyz).

3. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau :

a) $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$;

b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t'. \end{cases}$

4. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau

$d : \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t'. \end{cases}$

5. Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau :

a) $d : \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(\alpha) : 3x + 5y - z - 2 = 0$;

b) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và $(\alpha) : x + 3y + z + 1 = 0$;

c) $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và $(\alpha) : x + y + z - 4 = 0$.

6. Tính khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(\alpha) : 2x - 2y + z + 3 = 0$.

7. Cho điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t. \end{cases}$

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ.

b) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ.

8. Cho điểm $M(1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 1 = 0$.

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

9. Cho hai đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1. \end{cases}$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp toạ độ :

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến các mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'D'C)$.