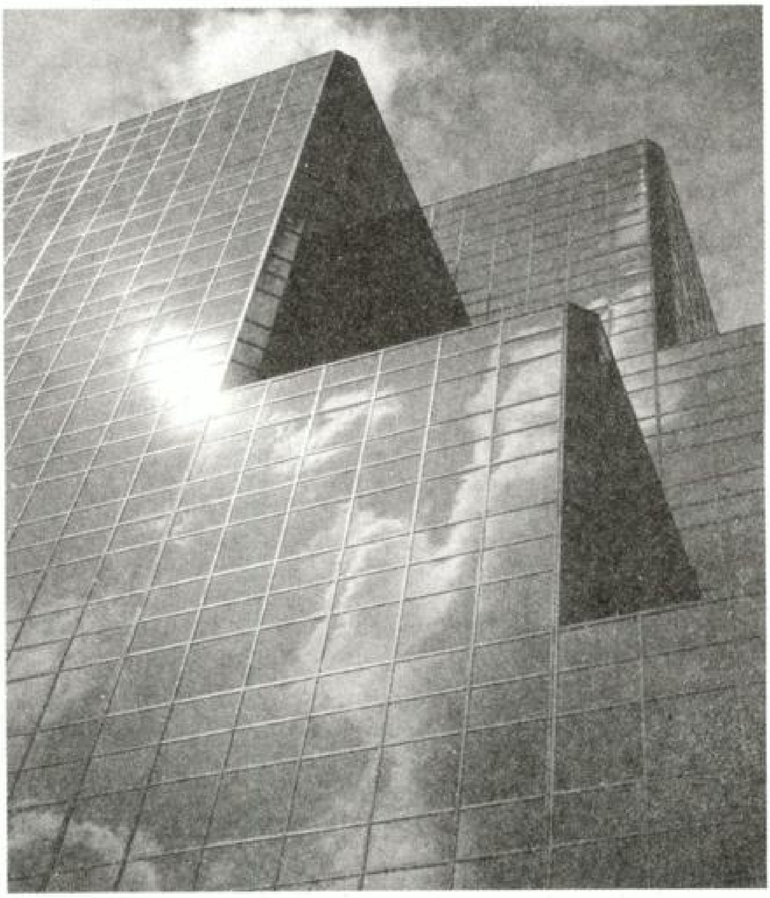
§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Trong hình học không gian ở lớp 11 ta đã biết một số cách xác định mặt phẳng, chẳng hạn như xác định mặt phẳng bằng ba điểm không thẳng hàng, bằng hai đường thẳng cắt nhau, ... Bây giờ ta sẽ xác định mặt phẳng bằng phương pháp toạ độ.



Các bức tường của toà nhà cao tầng hiện đại cho ta hình ảnh của mặt phẳng trong không gian

I- VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

☞ ***Chú ý.*** Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$, cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.

Bài toán

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) và hai vectơ không cùng phương $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$, $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$ có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α). Chứng minh rằng mặt phẳng (α) nhận vectơ

$$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2 ;\ a_3b_1 - a_1b_3 ;\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

làm vectơ pháp tuyến.

Giải

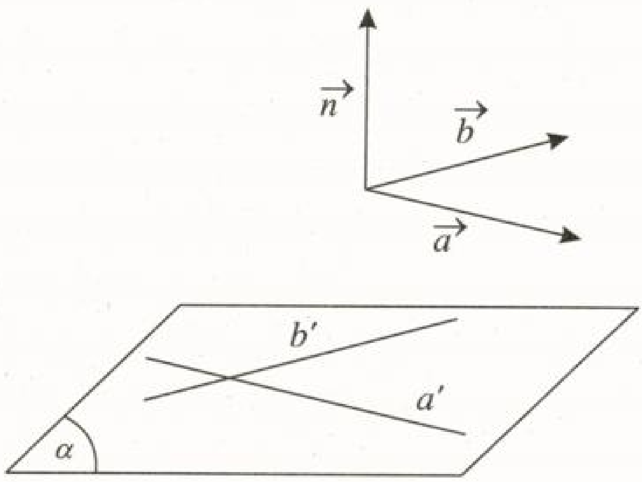
Ta có : $\vec{a}.\vec{n} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$

$= (a_1a_2b_3 - a_2a_1b_3) + (a_3a_1b_2 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_3a_2b_1)$

$= 0.$

Tương tự $\vec{b}.\vec{n} = 0$.

Vậy vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, có nghĩa là giá của nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của mặt phẳng (α) (h.3.4). Suy ra giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α). Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương nên các toạ độ của $\vec{n}$ không đồng thời bằng 0, suy ra $\vec{n} \neq \vec{0}$. Do đó vectơ $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).



Hình 3.4

Vectơ $\vec{n}$ xác định như trên được gọi là tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ hoặc $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

△1 Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2 ; -1 ; 3)$, $B(4 ; 0 ; 1)$, $C(-10 ; 5 ; 3)$. Hãy tìm toạ độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

II- PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

Bài toán 1

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{n}(A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để điểm $M(x ; y ; z)$ thuộc mặt phẳng (α) là :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

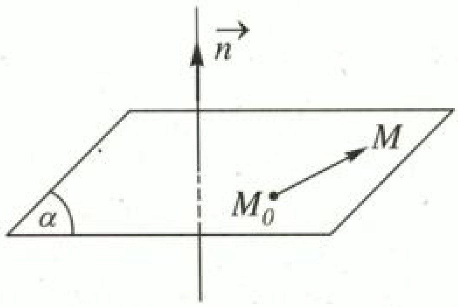
Giải

Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 ; y - y_0 ; z - z_0)$ (h.3.5)

$$M \in (\alpha) \Leftrightarrow M_0M \subset (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$



Hình 3.5

Bài toán 2

Trong không gian $Oxyz$, chứng minh rằng tập hợp các điểm $M(x ; y ; z)$ thoả mãn phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0) là một mặt phẳng nhận vectơ $\vec{n} = (A ; B ; C)$ làm vectơ pháp tuyến.

Giải

Ta lấy điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ sao cho $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ (chẳng hạn nếu $A \neq 0$ thì ta lấy $x_0 = -\dfrac{D}{A}$; $y_0 = z_0 = 0$).

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và nhận $\vec{n} = (A\ ;\ B\ ;\ C)$ làm vectơ pháp tuyến. Ta có :

$$M \in (\alpha) \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \text{ vì } D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Từ hai bài toán trên ta có định nghĩa sau.

1. Định nghĩa

Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét

a) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A\ ;\ B\ ;\ C)$.

b) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ nhận vectơ $\vec{n}(A\ ;\ B\ ;\ C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

△2 Hãy tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) : $4x - 2y - 6z + 7 = 0$.

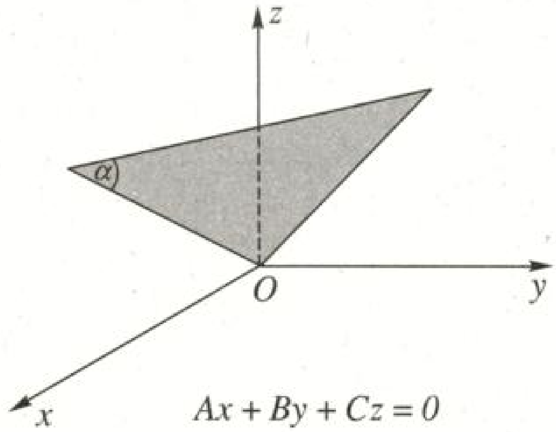
△3 Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với $M(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $N(4\ ;\ 3\ ;\ 2)$, $P(5\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

2. Các trường hợp riêng

Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) :

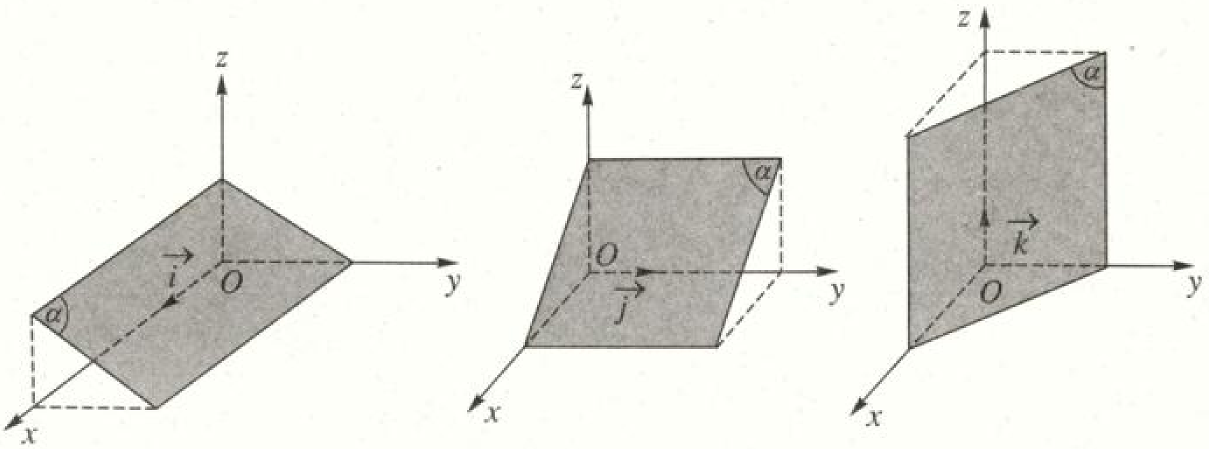
$Ax + By + Cz + D = 0.$ (1)

a) Nếu $D = 0$ thì gốc toạ độ O có toạ độ thoả mãn phương trình của mặt phẳng (α). Vậy (α) đi qua gốc toạ độ O (h.3.6).



Hình 3.6

b) Nếu một trong ba hệ số A, B, C bằng 0, chẳng hạn $A = 0$ thì mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0\ ;\ B\ ;\ C)$. Ta có $\vec{n}.\vec{i} = 0$. Do $\vec{i}$ là vectơ chỉ phương của Ox nên ta suy ra (α) song song hoặc chứa trục Ox (h.3.7a).



$By + Cz + D = 0$ a)

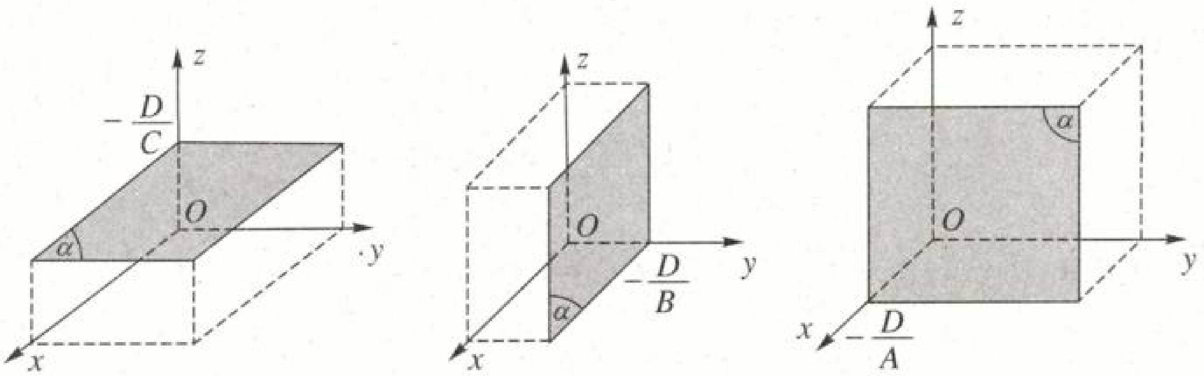
$Ax + Cz + D = 0$ b)

$Ax + By + D = 0$ c)

Hình 3.7

4 Nếu $B = 0$ hoặc $C = 0$ thì mặt phẳng (α) có đặc điểm gì ?

c) Nếu hai trong ba hệ số A, B, C bằng 0, ví dụ $A = B = 0$ và $C \neq 0$ thì từ trường hợp b) ta suy ra mặt phẳng (α) song song với Ox và Oy hoặc (α) chứa Ox và Oy. Vậy (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy) (h.3.8a).



$Cz + D = 0$ a)

$By + D = 0$ b)

$Ax + D = 0$ c)

Hình 3.8

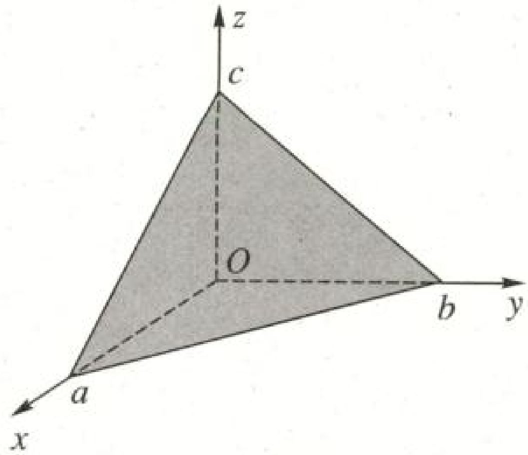
$\triangle$5 Nếu $A = C = 0$ và $B \neq 0$ hoặc nếu $B = C = 0$ và $A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) có đặc điểm gì ?

Nhận xét

Nếu cả bốn hệ số A, B, C, D đều khác 0 thì bằng cách đặt $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, ta có thể đưa phương trình (1) về dạng sau đây :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2)$$

Khi đó mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm có toạ độ là $(a ; 0 ; 0)$, $(0 ; b ; 0)$, $(0 ; 0 ; c)$. Người ta còn gọi phương trình (2) là *phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn* (h.3.9).



Hình 3.9

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(1 ; 0 ; 0)$, $N(0 ; 2 ; 0)$, $P(0 ; 0 ; 3)$. Hãy viết phương trình mặt phẳng (MNP).

Giải

Áp dụng phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình của mặt phẳng (MNP) là :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \text{ hay } 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

III- ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

$\triangle$6 Cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình

$$(\alpha) : x - 2y + 3z + 1 = 0,$$

$$(\beta) : 2x - 4y + 6z + 1 = 0.$$

Có nhận xét gì về vectơ pháp tuyến của chúng ?

Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình

$$(\alpha_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$(\alpha_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

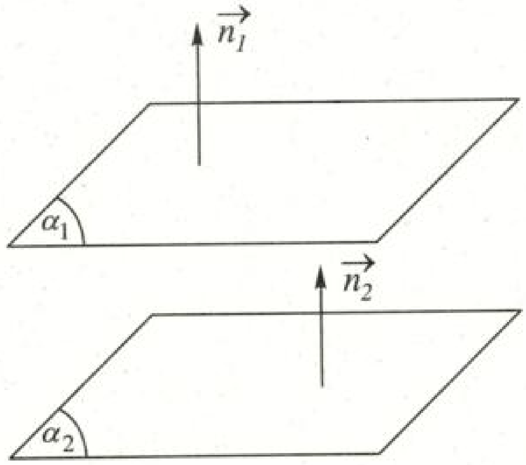
Khi đó (α_1) và (α_2) có hai vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{n_1} = (A_1 ; B_1 ; C_1),$$

$$\vec{n_2} = (A_2 ; B_2 ; C_2).$$

Ta xét điều kiện để hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song hoặc vuông góc với nhau.

1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song



Hình 3.10

Ta nhận thấy hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi chúng cùng vuông góc với một đường thẳng, nghĩa là khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ của chúng cùng phương (h.3.10).

Khi đó ta có : $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$.

Nếu $D_1 = kD_2$ thì ta có (α_1) trùng với (α_2).

Nếu $D_1 \neq kD_2$ thì (α_1) song song với (α_2).

Vậy ta suy ra

$$(\alpha_1) /\!/ (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1 ; B_1 ; C_1) = k(A_2 ; B_2 ; C_2) \\ D_1 \neq kD_2. \end{cases}$$

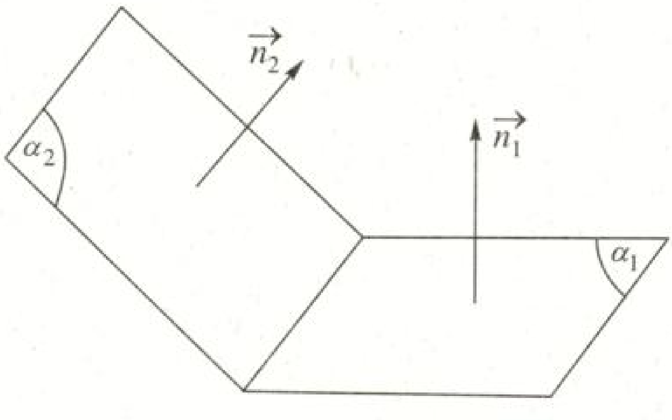
$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1 ; B_1 ; C_1) = k(A_2 ; B_2 ; C_2) \\ D_1 = kD_2. \end{cases}$$

☞ ***Chú ý***

(α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2$ (h.3.11)

$$\Leftrightarrow (A_1 ; B_1 ; C_1) \neq k(A_2 ; B_2 ; C_2).$$



Hình 3.11

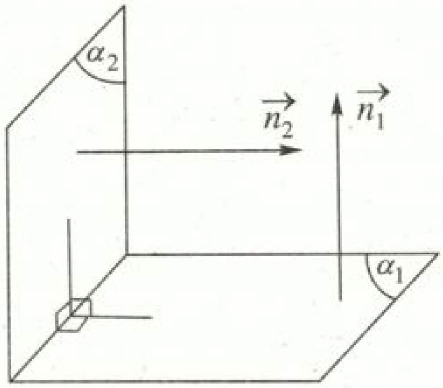
Ví dụ. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1 ; -2 ; 3)$ và song song với mặt phẳng $(\beta) : 2x - 3y + z + 5 = 0$.

Giải

Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) nên (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2 ; -3 ; 1)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1 ; -2 ; 3)$, vậy (α) có phương trình :

$$2(x-1) - 3(y+2) + 1(z-3) = 0 \text{ hay } 2x - 3y + z - 11 = 0.$$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc



Hình 3.12

Ta nhận thấy hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ tương ứng của chúng vuông góc với nhau (h.3.12).

Vậy ta có điều kiện :

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Ví dụ. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3 ; 1 ; -1)$, $B(2 ; -1 ; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng (β) có phương trình :

$$2x - y + 3z - 1 = 0.$$

Giải

Gọi $\vec{n_\beta}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β). Hai vectơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trên (α) là :

$$\overrightarrow{AB} = (-1 ; -2 ; 5) \text{ và } \vec{n_\beta} = (2 ; -1 ; 3).$$

Do đó mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến :

$$\vec{n_\alpha} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{n_\beta} = (-1 ; 13 ; 5).$$

Vậy phương trình của (α) là :

$$-1(x - 3) + 13(y - 1) + 5(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 13y - 5z + 5 = 0.$$

IV- KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Định lí

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α), kí hiệu là $d(M_0, (\alpha))$, được tính theo công thức :

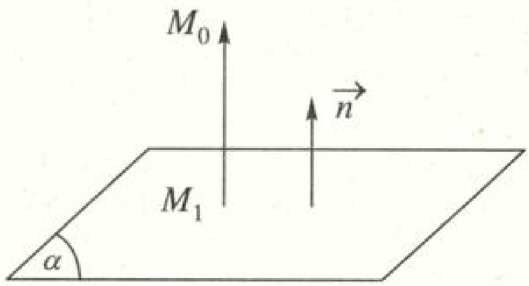
$$\boxed{d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Chứng minh

Gọi $M_1(x_1 ; y_1 ; z_1)$ là hình chiếu vuông góc của M_0 trên (α) (h.3.13). Xét hai vectơ

$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1 ; y_0 - y_1 ; z_0 - z_1)$

và $\vec{n} = (A ; B ; C)$, ta thấy $\overrightarrow{M_1M_0}$ và $\vec{n}$ cùng phương vì giá của chúng cùng vuông góc với (α). Suy ra :



Hình 3.13

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}.\vec{n}\right|$$
$$= \left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)\right|$$
$$= \left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1)\right|. \quad (1)$$

Mặt khác vì M_1 thuộc (α) nên ta có :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

hay $\quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1. \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được $\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\left|\vec{n}\right| = \left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|$.

Gọi khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) là $d(M_0, (\alpha))$.

Vậy $d(M_0, (\alpha)) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ gốc toạ độ và từ điểm $M(1 ; -2 ; 13)$ đến mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 2y - z + 3 = 0$.

Giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách ở trên ta có :

$$d(O, (\alpha)) = \frac{|2.(0) - 2.(0) - (0) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{3} = 1 ;$$

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|2.1 - 2.(-2) - 13 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) cho bởi các phương trình sau đây :

$$(\alpha) : x + 2y + 2z + 11 = 0,$$

$$(\beta) : x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

Giải

Ta biết khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.

Ta lấy điểm $M(0 ; 0 ; -1)$ thuộc (β), kí hiệu $d((\alpha), (\beta))$ là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β), ta có :

$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha)) = \frac{|(0) + 2.(0) + 2.(-1) + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

7 Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) cho bởi các phương trình sau đây :

$$(\alpha): x - 2 = 0,$$

$$(\beta): x - 8 = 0.$$

BÀI TẬP

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

1. Viết phương trình của mặt phẳng :

a) Đi qua điểm $M(1 ; -2 ; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2 ; 3 ; 5)$ làm vectơ pháp tuyến ;

b) Đi qua điểm $A(0 ; -1 ; 2)$ và song song với giá của mỗi vectơ $\vec{u} = (3 ; 2 ; 1)$ và $\vec{v} = (-3 ; 0 ; 1)$;

c) Đi qua ba điểm $A(-3 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; -2 ; 0)$ và $C(0 ; 0 ; -1)$.

2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2 ; 3 ; 7)$, $B(4 ; 1 ; 3)$.

3. a) Lập phương trình của các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm $M(2 ; 6 ; -3)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng toạ độ.

4. Lập phương trình của mặt phẳng :

a) Chứa trục Ox và điểm $P(4 ; -1 ; 2)$;

b) Chứa trục Oy và điểm $Q(1 ; 4 ; -3)$;

c) Chứa trục Oz và điểm $R(3 ; -4 ; 7)$.

5. Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5 ; 1 ; 3)$, $B(1 ; 6 ; 2)$, $C(5 ; 0 ; 4)$, $D(4 ; 0 ; 6)$.

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

6. Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2 ; -1 ; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$.

7. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(5 ; 2 ; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + z - 7 = 0$.

8. Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau :

a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$;

b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.

9. Tính khoảng cách từ điểm $A(2 ; 4 ; -3)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau :

a) $2x - y + 2z - 9 = 0$;

b) $12x - 5z + 5 = 0$;

c) $x = 0$.

10. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp toạ độ :

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng nói trên.