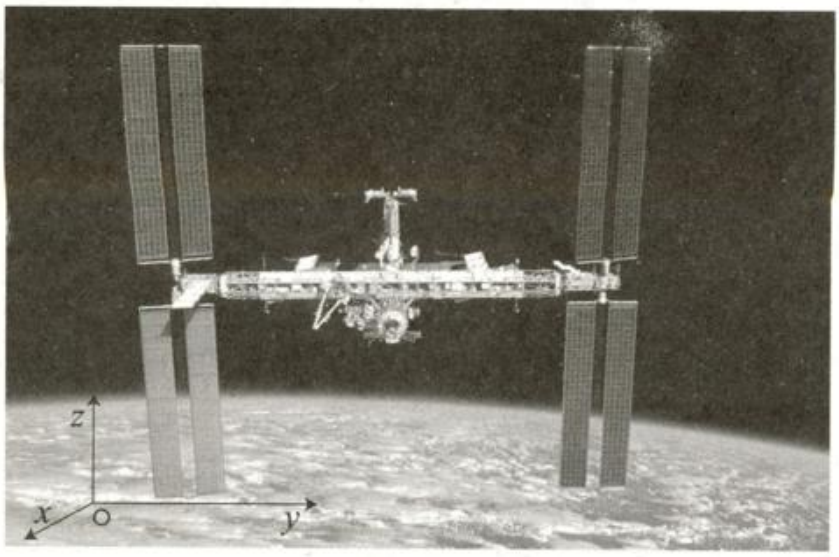
§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



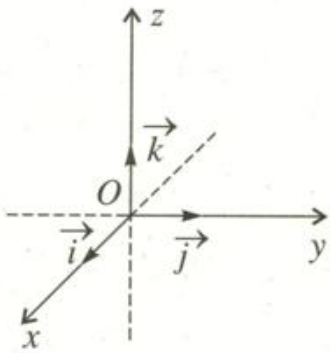
Trái Đất và Trạm vũ trụ ISS (International Space Station) trong không gian

I- TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ CỦA VECTƠ

1. Hệ toạ độ

Trong không gian, cho ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là *các vectơ đơn vị* trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

Hệ ba trục như vậy được gọi là *hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc Oxyz* trong không gian, hay đơn giản được gọi là *hệ toạ độ Oxyz* (h.3.1).



Hình 3.1

Điểm O được gọi là *gốc toạ độ*.

Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các *mặt phẳng toạ độ*.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là *không gian Oxyz*.

Vì $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

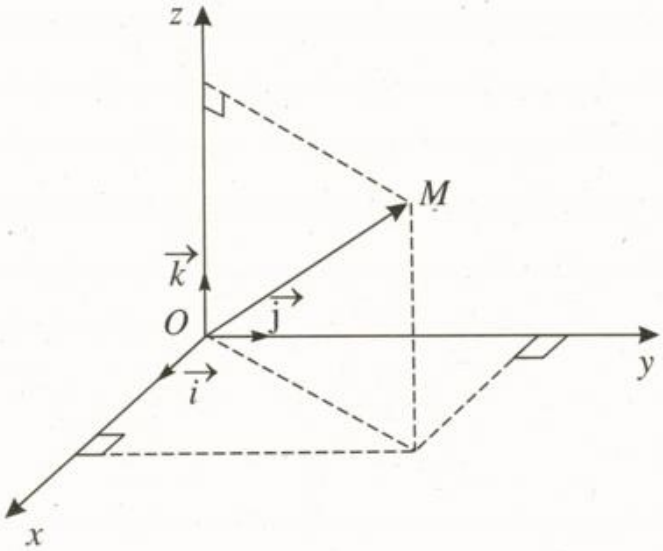
và $$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

1 Trong không gian Oxyz, cho một điểm *M*. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo ba vectơ không đồng phẳng $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ đã cho trên các trục *Ox, Oy, Oz*.

2. Toạ độ của một điểm

Trong không gian *Oxyz*, cho một điểm *M* tuỳ ý. Vì ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ không đồng phẳng nên có một bộ ba số $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ duy nhất sao cho :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ (h.3.2).}$$



Hình 3.2

Ngược lại, với bộ ba số $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ ta có một điểm *M* duy nhất trong không gian thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ta gọi bộ ba số $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ đó là *toạ độ của điểm M* đối với hệ trục toạ độ *Oxyz* đã cho và viết :

$$M = (x\ ;\ y\ ;\ z) \text{ hoặc } M(x\ ;\ y\ ;\ z).$$

3. Toạ độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$, khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1 ; a_2 ; a_3)$ sao cho : $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Ta gọi bộ ba số $(a_1 ; a_2 ; a_3)$ đó là *toạ độ của vectơ* $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ cho trước và viết $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1 ; a_2 ; a_3)$.

Nhận xét. Trong hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ của điểm M chính là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Ta có : $M = (x ; y ; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x ; y ; z)$.

2 Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, có $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Hãy tính toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

II- BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Định lí

Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ *và* $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$. *Ta có :*

a) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2 ; a_3 + b_3)$,

b) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 ; a_2 - b_2 ; a_3 - b_3)$,

c) $k\vec{a} = k(a_1 ; a_2 ; a_3) = (ka_1 ; ka_2 ; ka_3)$

với k là một số thực.

Chứng minh

Theo giả thiết : $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}.$$

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2 ; a_3 + b_3)$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp b) và c).

Hệ quả

a) Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ *và* $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$.

Ta có : $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$

b) Vectơ $\vec{0}$ *có toạ độ là* (0 ; 0 ; 0).

c) Với $\vec{b} \neq \vec{0}$ *thì hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho :* $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $a_3 = kb_3$.

d) Trong không gian Oxyz, nếu cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$, $B(x_B ; y_B ; z_B)$ *thì :*

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$.
- *Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là*

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

III- TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Định lí

Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ *và* $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$ *được xác định bởi công thức*

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Chứng minh

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}).(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= a_1b_1\vec{i}^2 + a_1b_2\vec{i}.\vec{j} + a_1b_3\vec{i}.\vec{k} + a_2b_1\vec{j}.\vec{i} +$$

$$+ a_2b_2\vec{j}^2 + a_2b_3\vec{j}.\vec{k} + a_3b_1\vec{k}.\vec{i} + a_3b_2\vec{k}.\vec{j} + a_3b_3\vec{k}^2.$$

Vì $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ nên

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

2. Ứng dụng

a) Độ dài của một vectơ. Cho vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$.

Ta biết rằng $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ hay $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Do đó

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

b) Khoảng cách giữa hai điểm. Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(x_A ; y_A ; z_A)$ và $B(x_B ; y_B ; z_B)$. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm *A* và *B* chính là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Do đó ta có :

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

c) Góc giữa hai vectơ. Nếu φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1 ; b_2 ; b_3)$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. Do đó :

$$\boxed{\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Từ đó ta suy ra $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$

3 Với hệ toạ độ *Oxyz* trong không gian, cho $\vec{a}$ = (3 ; 0 ; 1), $\vec{b}$ = (1 ; –1 ; –2), $\vec{c}$ = (2 ; 1 ; –1). Hãy tính $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c})$ và $|\vec{a} + \vec{b}|$.

IV- PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lí

Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a ; b ; c) bán kính r có phương trình là :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2}$$

Chứng minh

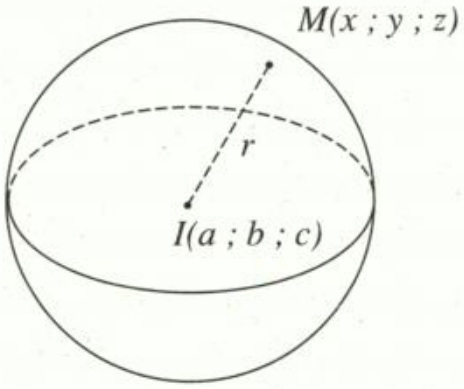
Gọi $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ là một điểm thuộc mặt cầu (S) tâm I bán kính r (h.3.3).

Khi đó : $M \in (S) \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2.$$

Do đó $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ là phương trình của mặt cầu (S).



Hình 3.3

4 Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ có bán kính $r = 5$.

Nhận xét. Phương trình mặt cầu nói trên có thể viết dưới dạng :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $d = a^2+b^2+c^2-r^2$.

Từ đó người ta chứng minh được rằng phương trình dạng $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$ với điều kiện $A^2+B^2+C^2-D>0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(-A\ ;\ -B\ ;\ -C)$ có bán kính $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

Ví dụ. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình :

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+5=0.$$

Giải

Phương trình mặt cầu đã cho tương đương với phương trình sau :

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=3^2.$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I = (-2 ; 1 ; -3)$, bán kính $r = 3$.

BÀI TẬP

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

1. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2 ; -5 ; 3)$, $\vec{b} = (0 ; 2 ; -1)$, $\vec{c} = (1 ; 7 ; 2)$.

a) Tính toạ độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

b) Tính toạ độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

2. Cho ba điểm $A = (1 ; -1 ; 1)$, $B = (0 ; 1 ; 2)$, $C = (1 ; 0 ; 1)$.
Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A = (1 ; 0 ; 1)$, $B = (2 ; 1 ; 2)$, $D = (1 ; -1 ; 1)$, $C' = (4 ; 5 ; -5)$. Tính toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

4. Tính

a) $\vec{a}.\vec{b}$ với $\vec{a} = (3 ; 0 ; -6)$, $\vec{b} = (2 ; -4 ; 0)$.

b) $\vec{c}.\vec{d}$ với $\vec{c} = (1 ; -5 ; 2)$, $\vec{d} = (4 ; 3 ; -5)$.

5. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau đây :

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.

6. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau đây :

a) Có đường kính AB với $A = (4 ; -3 ; 7)$, $B = (2 ; 1 ; 3)$.

b) Đi qua điểm $A = (5 ; -2 ; 1)$ và có tâm $C = (3 ; -3 ; 1)$.