§1. Hệ toạ độ trong không gian

I. MỤC TIÊU

Yêu cầu học sinh :

1. Nắm vững định nghĩa về toạ độ của một điểm, của một vectơ đối với một hệ toạ độ xác định trong không gian.

2. Hiểu và nhớ các biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, các công thức biểu thị các quan hệ giữa các vectơ (cùng phương, đồng phẳng,vuông góc...), các cách tính diện tích tam giác, thể tích khối hộp và khối tứ diện.

3. Hiểu và nhớ được các công thức biểu thị mối quan hệ giữa các điểm (thẳng hàng, đồng phẳng, toạ độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác và tứ diện...).

4. Viết được phương trình của mặt cầu với các điều kiện cho trước. Xác định được tâm và tính bán kính mặt cầu khi biết phương trình của nó.

5. Bước đầu biết vận dụng phương pháp toạ độ để giải các bài toán Hình học không gian đơn giản.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trước tiên, SGK nêu định nghĩa toạ độ của một điểm M đối với một hệ toạ độ cho trước bằng cách biểu thị vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Sau đó thông qua các câu hỏi $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ và Hoạt động 1, giáo viên giúp cho học sinh hình dung một cách trực quan ý nghĩa hình học của các toạ độ x, y, z và xác định toạ độ đó trong một số trường hợp đặc biệt về vị trí của điểm M.

Sau đó SGK nêu định nghĩa toạ độ của một vectơ mà không đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng xác định toạ độ của một vectơ nào đó trên hình vẽ, hoặc xác định một vectơ khi biết toạ độ. Vấn đề đó được giải quyết khi học sinh được biết sự liên hệ giữa toạ độ của một vectơ và toạ độ hai điểm mút.

2. Chú ý rằng đối với ban Khoa học xã hội và Nhân văn, khái niệm tích vectơ không trình bày cho học sinh như là đối với ban Khoa học tự nhiên. Dùng tích vectơ ta có thể giải quyết nhanh một số bài toán sau đây :

a) Cho toạ độ của hai vectơ không cùng phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ta có thể tìm toạ độ của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

b) Có thể tính diện tích tam giác ABC khi biết toạ độ các đỉnh.

c) Có thể tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

d) Có thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau….

Cố nhiên các bài toán trên có thể giải được khi không dùng khái niệm tích vectơ, mà chỉ cần đến điều kiện vuông góc của hai vectơ (tích vô hướng của chúng bằng 0). Điều này chúng ta sẽ nói rõ về sau.

III.TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{\textbf{?1}}$ Do các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đều là vectơ đơn vị và đôi một vuông góc (tính chất của tích vô hướng).

$\boxed{\textbf{?2}}$ Vì $M = (x\ ;\ y\ ;\ z)$ nên $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Do đó :

$$\overrightarrow{OM}.\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).\vec{i} = x\vec{i}^2 = x.$$

Tương tự : $\overrightarrow{OM}.\vec{j} = y$ và $\overrightarrow{OM}.\vec{k} = z$.

$\boxed{\textbf{?3}}$ • Vì $\overrightarrow{OO} = \vec{0} = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ nên $O = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

• $M \in (Oxy) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{k} = 0 \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M = (x\ ;\ y\ ;\ 0)$

$M \in (Oyz) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M = (0\ ;\ y\ ;\ z)$

$M \in (Ozx) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{j} = 0 \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M = (x\ ;\ 0\ ;\ z)$.

$\boxed{\textbf{?4}}$ $M \in Ox \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} = x\vec{i} + 0.\vec{j} + 0.\vec{k}$, tức là $M = (x\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

Tương tự $M \in Oy \Leftrightarrow M = (0\ ;\ y\ ;\ 0)$, $M \in Oz \Leftrightarrow M = (0\ ;\ 0\ ;\ z)$.

HĐ1 a) $A = (2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B = (3\ ;\ 4\ ;\ 0)$, $C = (0\ ;\ 4\ ;\ 4)$, $D = (1\ ;\ 0\ ;\ 5)$, $E = (3\ ;\ 4\ ;\ 3)$.

Xác định điểm $P(3\ ;\ 6\ ;\ -3)$ có thể thực hiện theo hai cách :

Cách 1 :

Ta có

$$\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Lấy điểm M sao cho

$$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i},$$

lấy điểm N sao cho

$$\overrightarrow{MN} = 6\vec{j},$$

và cuối cùng, lấy điểm P sao cho

$$\overrightarrow{NP} = -3\vec{k}.$$

Cách 2.

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy xác định điểm

$$P' = (3\ ;\ 6\ ;\ 0).$$

Điểm P là ảnh của P' qua phép tịnh tiến theo vectơ $-3\vec{k}$.

HĐ2 a) Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Vậy I có tọa độ :

$$x_I = \frac{1}{2}\left(x_A + x_B\right); y_I = \frac{1}{2}\left(y_A + y_B\right), z_I = \frac{1}{2}\left(z_A + z_B\right).$$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Vậy G có toạ độ

$$x_G = \frac{1}{3}\left(x_A + x_B + x_C\right);$$

$$y_G = \frac{1}{3}\left(y_A + y_B + y_C\right);$$

$$z_G = \frac{1}{3}\left(z_A + z_B + z_C\right).$$

c) Nếu E là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Vậy : $x_E = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D)$;

$$y_E = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D);$$

$$z_E = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D)$$

HĐ3.

Cách 1 :

Tâm I của mặt cầu là trung điểm A_1A_2 nên

$$I = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} ; \frac{b_1 + b_2}{2} ; \frac{c_1 + c_2}{2} \right),$$

bán kính R của mặt cầu là

$$R = \frac{1}{2} A_1A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$\left(x - \frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{b_1 + b_2}{2} \right)^2 + \left(z - \frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2)y - (c_1 + c_2)z + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Cách 2 :

Giả sử $M = (x ; y ; z)$ thì

$$\overrightarrow{A_1M} = (x - a_1 ; y - b_1 ; z - c_1)$$

$$\overrightarrow{A_2M} = (x - a_2 ; y - b_2 ; z - c_2).$$

Điểm M thuộc mặt cầu đường kính A_1A_2 khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{A_1M} . \overrightarrow{A_2M} = 0,$$

hay :

$$(x - a_1)(x - a_2) + (y - b_1)(y - b_2) + (z - c_1)(z - c_2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2)y - (c_1 + c_2)z + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

HĐ4.

Cách 1 :

Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. \quad (*)$$

Vì mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, D nên toạ độ các điểm đó phải thoả mãn phương trình (*). Lần lượt thay toạ độ của A, B, C, D vào phương trình đó ta được :

$$d = 0 \ ; \ 1+2a = 0 \ ; \ 1+2b = 0 \ ; \ 1+2c = 0,$$

vậy

$$2a = 2b = 2c = -1, \ d = 0.$$

Vậy ta được phương trình mặt cầu :

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0.$$

Cách 2.

Gọi $I\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ là tâm mặt cầu thì

$IA = IB = IC = ID$, hay :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ -2y + 1 = 0 \\ -2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy tâm I có toạ độ

$$I = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right).$$

Bán kính R của mặt cầu là

$$R = AI = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó mặt cầu có phương trình :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4},$$

hay

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0.$$

HĐ5. a) Không phải, vì hệ số của x^2, y^2 *và* z^2 không bằng nhau.

b) Là phương trình mặt cầu có tâm (1 ; 0 ; 0), có bán kính bằng 1.

c) Không phải, vì phương trình sau khi rút gọn vẫn còn chứa số hạng $-2xy$.

d) Phương trình rút gọn thành

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Đó là phương trình mặt cầu với tâm (0 ; 0 ; 0) và bán kính bằng 1.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. a) $\vec{u}=(1\,;-2\,;0)$;

$\vec{v}=(3\,;5\,;-5)$;

$\vec{w}=(2\,;3\,;-1)$.

b) $\cos(\vec{v},\vec{i})=\dfrac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}|.\,|\vec{i}|}=\dfrac{3}{\sqrt{59}}$;

$\cos(\vec{v},\vec{j})=\dfrac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}|.|\vec{j}|}=\dfrac{5}{\sqrt{59}}$;

$\cos(\vec{v},\vec{k})=\dfrac{\vec{v}.\vec{k}}{|\vec{v}|.|\vec{k}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{59}}$.

c) $\vec{u}.\vec{v}=-7$; $\quad\vec{u}.\vec{w}=-4$; $\quad\vec{v}.\vec{w}=26$.

2. Giả sử $\vec{u} = (x;y;z)$. Khi đó ta có :

$$\cos(\vec{u},\vec{i}) = \frac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}|.|\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

do đó : $\cos^2(\vec{u},\vec{i}) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Tương tự :

$$\cos^2(\vec{u},\vec{j}) = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} \ ;$$

$$\cos^2(\vec{u},\vec{k}) = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3. a) Nếu M_1 là hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ trên mặt phẳng (Oxy) thì

$$\overrightarrow{M_1M} = c\vec{k}.$$

Vậy

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_1} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} - c\vec{k} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Suy ra

$$M_1 = (a\ ;\ b\ ;\ 0).$$

Tương tự : Nếu M_2 là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz) thì

$$M_2 = (0\ ;\ b\ ;\ c).$$

Nếu M_3 là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxz) thì

$$M_3 = (a\ ;\ 0\ ;\ c).$$

Nếu M_x là hình chiếu của $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$ trên trục Ox thì

$$M_x = (a\ ;\ 0\ ;\ 0).$$

Nếu M_y là hình chiếu của $M(a ; b ; c)$ trên trục Oy thì

$$M_y = (0 ; b ; 0).$$

Nếu M_z là hình chiếu của $M(a ; b ; c)$ trên trục O_z thì

$$M_z = (0 ; 0 ; c)$$

b) * Nếu M_1' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì M_1 là trung điểm của MM_1', do đó

$$\overrightarrow{OM_1'} + \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM_1} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1'} = 2\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}.$$

Vậy $\quad M_1' = (a ; b ; -c).$

Tương tự : Nếu M_2' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oyz) thì

$$M_2' = (-a ; b ; c).$$

Nếu M_3' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì

$$M_3' = (a ; -b ; c).$$

* Nếu M_x' đối xứng với M qua trục Ox thì M_x là trung điểm của MM_x', do đó

$$\overrightarrow{OM_x'} + \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM_x} \Rightarrow \overrightarrow{OM_x'} = 2\overrightarrow{OM_x} - \overrightarrow{OM}.$$

Vậy $\quad M_x' = (a ; -b ; -c).$

Tương tự : Nếu M_y' đối xứng với M qua trục Oy thì $M_y' = (-a ; b ; -c)$.

Nếu M_z' đối xứng với M qua trục Oy thì $M_z' = (-a ; -b ; c)$.

* Nếu M' đối xứng với điểm M qua O thì

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}.$$

Vậy $\quad M' = (-a ; -b ; -c).$

4. Với điểm $M(x ; y ; z)$ ta có

$$\overrightarrow{MA} = (x_1 - x ; y_1 - y ; z_1 - z),$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_2 - x ; y_2 - y ; z_2 - z).$$

Vì $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, nên :

$$\begin{cases} x_1 - x = k(x_2 - x) \\ y_1 - y = k(y_2 - y) \\ z_1 - z = k(z_2 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1-k} \end{cases}.$$

Chú ý rằng khi M là trung điểm AB thì $k = -1$ và ta có kết quả đã biết.

5. Ta có $\overrightarrow{AB} = (6 ; -1 ; 1)$; $\overrightarrow{BC} = (2 ; 3 ; 1)$

vì toạ độ hai vectơ đó không tỉ lệ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Nếu $D = (x ; y ; z)$ thì

$$\overrightarrow{AD} = (x + 3 ; y + 2 ; z).$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

hay : $x + 3 = 2$, $y + 2 = 3$, $z = 1$ vậy $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$.

Vậy $D = (-1 ; 1 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (8 ; 2 ; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-4 ; 4 ; 0)$

do đó : $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{-32 + 8}{\sqrt{72}.\sqrt{32}} = -\dfrac{1}{2}$..

Suy ra $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BD}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

6. a) M thuộc Ox nên

$$M = (x ; 0 ; 0).$$

Vì $MA = MB$ nên $MA^2 = MB^2$ hay :

$$(1 - x)^2 + 2^2 + 3^2 = (-3 - x)^2 + (-3)^2 + 2^2 \Rightarrow x = -1.$$

Vậy $M = (-1 ; 0 ; 0)$.

b) Ta có

$\overrightarrow{AB} = (2 ; \sqrt{3} ; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$.

Đường thẳng AB và OC vuông góc khi và chỉ khi

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 5t + \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 5t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t = 0 \Leftrightarrow \sin 5t = -\sin(3t + \frac{\pi}{3})$$

Vậy ta có đáp số :

$$t = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, \text{ với } k \in \mathbf{Z} \text{ ; hoặc } t = \frac{2\pi}{3} + l\pi \quad \text{với } l \in \mathbf{Z}$$

7. a) Ta thấy rằng hai vectơ $\vec{v}, \vec{w}$ không cùng phương, vậy ba veto $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng nếu có hai số m và n sao cho $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$, hay là :

$$\begin{cases} 4 = 2m + n \\ 3 = -m + 2n \\ 4 = 2m + n \end{cases}$$

Từ đó suy ra $m = 1$, $n = 2$. Vậy ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

b) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ không đồng phẳng.

c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

8. a) Ta có : $\overrightarrow{BA} = (1 ; 0 ; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (2 ; 1 ; 0)$,

toạ độ hai vectơ đó không tỉ lệ nên chúng không cùng phương.

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Nếu $D = (x ; y ; z)$ thì $\overrightarrow{AD} = (x - 1 ; y ; z)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta phải có điều kiện

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \text{ hay } x - 1 = 2, y = 1, z = 0.$$

Vậy $D = (3 ; 1 ; 0)$.

c) $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$.

Vậy chu vi tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Để tính nhanh diện tích tam giác ABC ta có thể nhận xét tam giác đó vuông tại A (vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$), vậy tam giác có diện tích

$$S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

d) Từ công thức

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.h_A$$

ta suy ra

$$h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

e) Vì tam giác ABC vuông tại A nên

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Cũng có thể tính $\cos B$ theo công thức :

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}}{BC.BA} = \frac{2.1 + 0 + 0}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

9. a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1 ; 0 ; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3 ; 1 ; -2)$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, nên ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m và n sao cho :

$$m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

hay là :

$$\begin{cases} -m - n = -3 \\ m + 0 = 1 \\ 0 + n = -2. \end{cases}$$

Vì hệ phương trình này vô nghiệm nên ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng, do đó A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

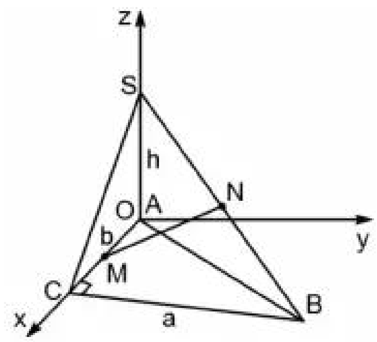
b) Ta có : $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -3)$, $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$.

$$\cos(AB, CD) = \left|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{|2+1+0|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$$

$$\cos(\text{AC}, \text{BD}) = \left|\cos(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}})\right| = \frac{|2+0-2|}{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = 0$$

$$\cos(BC, AD) = \left|\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{|0-1-2|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

10. Ta chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS (h. 68). Khi đó $A = (0 ; 0 ; 0)$, $C = (b ; 0 ; 0)$, $B = (b ; a ; 0)$. $S = (0 ; 0 ; h)$, $M = (\frac{b}{2} ; 0 ; 0)$. $\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$. Vì N là trung điểm SB nên $N = \left(\frac{b}{2} ; \frac{a}{2} ; \frac{h}{2}\right)$.



Hình 68

a) $\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{a}{2} ; \frac{h}{2}\right)$,

$$MN = \sqrt{0 + \frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + h^2}.$$

b) Ta thấy rằng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = 0$ vậy MN vuông góc AC. Để MN vuông góc với SB ta phải có

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{a^2}{2} - \frac{h^2}{2} = 0 \text{, hay } a = h.$$

11. a) Mặt cầu có tâm $I(4 ; -1 ; 0)$ và có bán kính

$R = 4$.

b) Mặt cầu có tâm $I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và có bán kính

$$R = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

Mặt cầu có tâm $I\left(\frac{1}{3}; -1; 0\right)$ và có bán kính

$$R = 1.$$

12. a) Tâm I của mặt cầu nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên $I = (0 ; b ; c)$. Ta tìm điều kiện của b và c để

$$IA = IB = IC$$

hay :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-b)^2 + c^2 = 4^2 + (6-b)^2 + (2-c)^2 \\ (8-b)^2 + c^2 = (12-b)^2 + (4-c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 12 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow b = 7, c = 5.$$

Vậy $I = (0 ; 7 ; 5)$. Khi đó

$$R = IA = \sqrt{0 + 1 + 25} = \sqrt{26}.$$

Mặt cầu có phương trình :

$$x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26.$$

b) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên tia Ox và mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên điểm tiếp xúc phải là O và do đó bán kính mặt cầu là $R = IO = 2$, và $I = (2 ; 0 ; 0)$.

Vậy mặt cầu có phương trình :

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

c) Vì mặt cầu có tâm $I(1 ; 2 ; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ I tới mặt phẳng (Oyz), vậy $R = 1$. Vậy mặt cầu có phương trình :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$