§1. Mặt cầu và khối cầu

1. MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được định nghĩa mặt cầu, hình cầu, vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng, giữa mặt cầu và đường thẳng.

2. Biết cách nhận biết một số hình đa diện có mặt cầu ngoại tiếp, xác định được tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

3. Nhớ được các công thức về diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và áp dụng vào các bài tập.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm mặt cầu được định nghĩa tương tự như khái niệm đường tròn trong mặt phẳng.

Trong không gian Ơ-clít n chiều ($n \geq 1$) khái niệm mặt cầu (thường gọi là siêu cầu) được định nghĩa hoàn toàn giống nhau.

Trong không gian 3 chiều khái niệm mặt cầu khá là trực quan và dễ hiểu đối với học sinh. Luôn luôn có thể lấy hình ảnh trực quan để miêu tả các khái niệm mặt cầu, ví dụ : một quả bóng đặt trên mặt bàn là hình ảnh của một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng, hay : giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng có thể minh hoạ bằng việc cắt quả dưa hấu (thật "tròn") bởi một nhát cắt phẳng.

2. Phương pháp chứng minh mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu hoặc đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu trong không gian tương tự như chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn trong hình học phẳng.

Tuy nhiên cần nhấn mạnh tại một điểm thuộc mặt cầu có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu đó và các đường thẳng ấy cũng thuộc một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm đó.

Cũng cần lưu ý rằng : Nếu Δ là một đường thẳng tiếp xúc với một mặt cầu thì bất cứ mặt phẳng nào chứa Δ mà cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn thì Δ tiếp xúc với đường tròn đó.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

HĐ1. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$$

$$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}).$$

1) Vì G là trọng tâm tam giác ABC đều cạnh a nên

$$GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

và $\quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}.$

Vậy $\quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2.$

2) Theo 1) ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 3MG^2 + a^2 \Leftrightarrow 3MG^2 = a^2$ tức là $GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3) Vậy tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$ là mặt cầu có tâm G (trọng tâm tam giác ABC) và bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

HĐ 2. $M \in (P) \cap S(O\,;R) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in S(O;R) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ OM = R \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - d^2. \end{cases}$$

HĐ 3. a) Khi $d < R$ giao của *(P)* và *S(O ; R)* là đường tròn nằm trong *(P)* có tâm H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

b) Khi $d = R$ giao của *(P)* và *S(O ; R)* là điểm H.

c) Khi $d > R$ giao của *(P)* và *S(O ; R)* là tập rỗng.

?1 Đúng.

HĐ 4.

1) Các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của hình chóp nằm trên mặt phẳng đáy của hình chóp và đồng thời nằm trên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, nên chúng nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng đáy và mặt cầu. Vậy đa giác đáy của hình chóp nội tiếp đường tròn đó.

2) Nếu hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ có đáy $A_1 A_2\ldots A_n$ là đa giác nội tiếp đường tròn tâm I thì ta gọi Δ là trục của đường tròn đó, và gọi O là giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh SA_1. Khi đó

$$OS = OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n.$$

Vậy hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp, đó là mặt cầu tâm O bán kính $R = SO$.

?2 Hình tứ diện có thể xem là hình chóp đáy tam giác, và vì tam giác luôn nội tiếp đường tròn nên tứ diện luôn nội tiếp mặt cầu.

?3 Nếu hình lăng trụ có cạnh bên không vuông góc với đáy thì nó phải có ít nhất một mặt bên là hình bình hành mà không phải là hình chữ nhật. Hình bình hành đó không nội tiếp đường tròn nên hình lăng trụ như vậy không nội tiếp mặt cầu.

?4 Mệnh đề 1) đúng vì mọi điểm của Δ khác với H đều nằm ngoài mặt cầu, chỉ có H là nằm trên mặt cầu.

Mệnh đề 2) đúng vì nếu d tiếp xúc với mặt cầu tại H thì d đi qua H và vuông góc với OH, do đó d nằm trên mặt phẳng vuông góc với OH tại H, đó chính là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

HĐ 5. Nếu O là trọng tâm tứ diện đều $ABCD$ thì ta biết rằng

$$OA = OB = OC = OD.$$

Từ đó suy ra các tam giác cân OAB, OAC, OAD, OBC, OCD, ODB bằng nhau. Suy ra khoảng cách từ O tới các cạnh của tứ diện bằng nhau, chẳng hạn bằng h, suy ra tất cả các cạnh của tứ diện đều tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính h.

?5 Không, vì nếu h là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu tới đường thẳng đó thì $h \leq OA < R$ (R là bán kính mặt cầu).

HĐ 6. 1) Vì AH là tiếp tuyến của đường tròn tại H nên khoảng cách từ O tới đường thẳng AH bằng R, vậy AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

2) Trong tam giác vuông OHA ta có

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

3) Vì HI là đường cao của tam giác vuông OHA nên

$$OI.OA = OH^2 \quad \text{hay} \quad OI = \frac{R^2}{d} \text{ (không đổi).}$$

Suy ra I là điểm cố định và do đó H nằm trên mặt phẳng (P) vuông góc với OA tại I. Ngoài ra vì H còn nằm trên mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ nên H nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng (P).

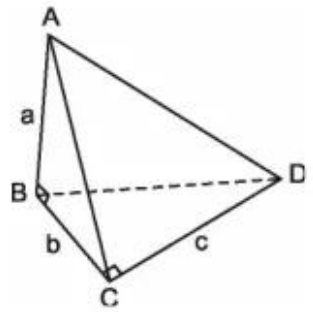
III. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. (h. 40) Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp BD$. Tương tự ta có $DC \perp AC$. Vậy các điểm A, B, C, D nằm trên mặt cầu đường kính AD.

Vì $\quad AD^2 + AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + c^2$

nên bán kính mặt cầu đó là

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Hình 40

Tâm mặt cầu là trung điểm cạnh AD.

2. a) I là tâm mặt cầu đi qua hai điểm A, B cho trước khi và chỉ khi $IA = IB$.

Vậy tập hợp các tâm điểm mặt cầu đó là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

b) I là tâm mặt cầu đi qua ba đỉnh của tam giác ABC cho trước khi và chỉ khi

$$IA = IB = IC.$$

Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) I là tâm mặt cầu đi qua đường tròn (C) cho trước khi và chỉ khi I cách đều mọi điểm của đường tròn.

Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn (C).

d) Gọi M là điểm nằm ngoài mặt phẳng của đường tròn (C). Lấy điểm A nằm trên (C) và gọi I là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MA. Khi đó mặt cầu tâm I, bán kính $R = IA = IM$ là mặt cầu đi qua đường tròn (C) và đi qua điểm M.

3. Cả a) và b) đều đúng.

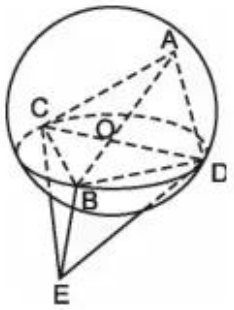
4. a) Đúng.

b) Không đúng.

Ví dụ : Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu S (h. 41). Lấy một điểm E nằm khác phía với A đối với mặt phẳng (BCD) sao cho E không nằm trên S.

Xét hình đa diện $ABCDE$ có 6 mặt là các tam giác ABC, ABD, ADC, EBC, ECD, EDB. Các mặt đó đều nội tiếp đường tròn nhưng hình đa diện $ABCDE$ không nội tiếp mặt cầu.

Thật vậy nếu có mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D, E thì nó phải đi qua A, B, C, D nên nó chính là mặt cầu S, nhưng E lại không nằm trên S.



Hình 41

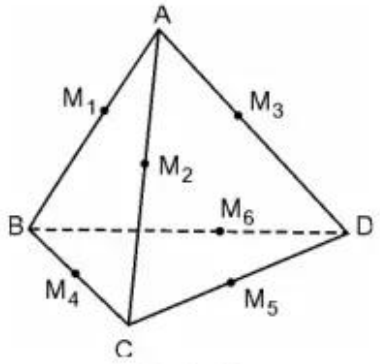
5. Giả sử có mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện $ABCD$ tại các điểm M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 như trên hình 42. Khi đó ta có :

$AM_1 = AM_2 = AM_3$,

$BM_1 = BM_6 = BM_4$

$CM_5 = CM_2 = CM_4$,

$DM_5 = DM_6 = DM_3$.



Hình 42

Suy ra :

$$AM_1 + BM_1 + CM_5 + DM_5$$
$$= AM_2 + CM_2 + BM_6 + DM_6$$
$$= AM_3 + DM_3 + BM_4 + CM_4$$

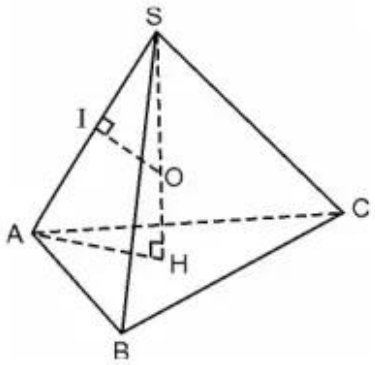
hay $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

Chú ý : Có thể chứng minh được nếu một tứ diện có tổng các cạnh đối bằng nhau thì có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của nó.

6. a) Giả sử SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABC$ (h. 43). Khi đó vì

$$SA = SB = SC$$

nên mọi điểm nằm trên SH cách đều A, B và C.



Hình 43

Trong mặt phẳng (SAH) đường trung trực của SA cắt SH tại O thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, và bán kính mặt cầu là $R = SO$.

Gọi I là trung điểm SA thì tứ giác $AHOI$ nội tiếp nên :

$$SO.\,SH = SI.SA \text{ hay } SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2h}.$$

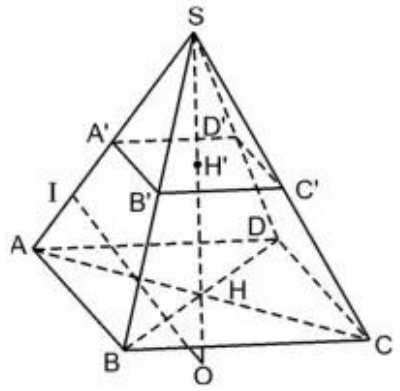
Ta có:

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3}.$$

Suy ra

$$R = SO = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}.$$

b) Gọi SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD$ thì H là tâm hình vuông $ABCD$ và SH đi qua tâm H' của hình vuông $A'B'C'D'$ (h. 44). Mọi điểm nằm trên SH đều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng cách đều bốn điểm A', B', C', D'. Trên đường thẳng SH ta xác định điểm O sao cho $OA = OA'$ thì O cách đều 8 điểm $A, B, C, D, A', B', C', D'$ tức là 8 điểm đó nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính $R = OA$. Điểm O là giao điểm của đường thẳng SH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'.



Hình 44

Ta chú ý rằng SAC là tam giác vuông cân. Gọi I là trung điểm AA' thì SIO cũng là tam giác vuông cân đỉnh I nên

$$OI = SI = \frac{3a}{4}.$$

Suy ra :

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

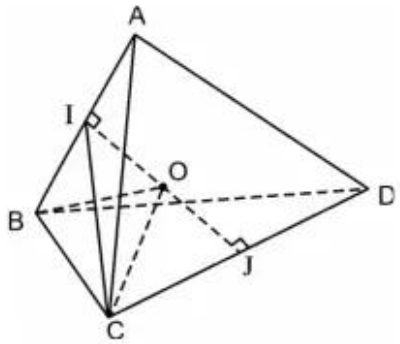
7. a) (h. 45) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì dễ thấy $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Bởi vậy nếu gọi O là trung điểm IJ thì

$$OA = OB \text{ và } OC = OD.$$

Ngoài ra $AB = CD = c$ nên hai tam giác vuông OIB và OJC bằng nhau nên $OB = OC$.

Vậy O cách đều bốn đỉnh A, B, C, D.



Hình 45

Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm O và có bán kính $R = OB$.

Ta có :

$$OB^2 = OI^2 + BI^2 = \frac{IJ^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{IJ^2 + c^2}{4}.$$

Vì CI là trung tuyến của tam giác ABC nên :

$$CI^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Suy ra

$$IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Như vậy $R^2 = OB^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là :

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

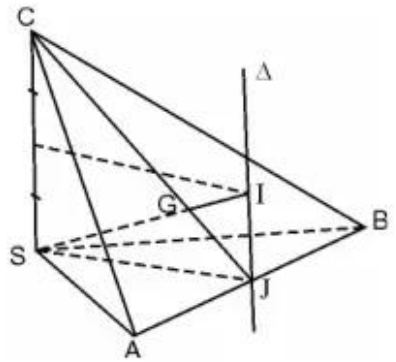
b) Các mặt của hình tứ diện là các tam giác bằng nhau (đều có ba cạnh bằng a, b, c) nên các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đó có bán kính r bằng nhau. Các đường tròn đó đều nằm trên mặt cầu (O, R) nên khoảng cách từ tâm O tới các mặt phẳng chứa các đường tròn đó bằng nhau và bằng $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Vậy mặt cầu tâm O bán kính h là mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

8. Gọi J là trung điểm AB. Vì tam giác SAB vuông ở S nên

$JS = JA = IB$. (h. 46)

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SAB) tại J thì mọi điểm của Δ cách đều ba điểm S, A, B. Bởi vậy nếu gọi I là giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SC thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C. Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm I và có bán kính $R = IA$.



Hình 46

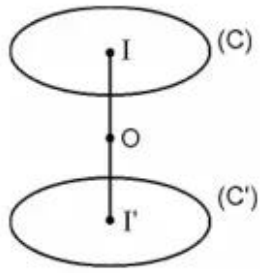
Ta có

$$R^2 = IA^2 = IJ^2 + AJ^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

Diện tích mặt cầu bằng :

$$S = 4\pi R^2 = \pi\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

9. a) Nếu ***H*** là hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp thì các mặt bên là những hình bình hành có đường tròn ngoại tiếp nên các mặt bên phải là hình chữ nhật. Vậy ***H*** là lăng trụ đứng.



Hình 47

Ngoài ra vì ***H*** có mặt cầu ngoại tiếp nên mặt đáy phải là đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

Ngược lại nếu ***H*** là lăng trụ đứng có các đường tròn (C) và (C') ngoại tiếp các đa giác đáy (h. 47). Gọi I và I' là tâm của hai đường tròn đó thì II' là trục của cả hai đường tròn. Vì thế nếu gọi O là trung điểm đoạn thẳng II' thì O cách đều tất cả các đỉnh của hình lăng trụ đã cho.

Vậy hình lăng trụ ấy có mặt cầu ngoại tiếp.

b) Nếu hình hộp ***H*** nội tiếp mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ thì các mặt của ***H*** phải là những hình chữ nhật, vậy ***H*** là hình hộp chữ nhật mà O là giao điểm các đường chéo, và độ dài đường chéo d là

$$d = 2R.$$

Gọi x, y, z là ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó thì

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 = 4R^2.$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp thì ta có :

$$S = 2xy + 2yz + 2zx \le x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2 = 8R^2.$$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $8R^2$ khi và chỉ khi

$$x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Khi đó ***H*** là hình lập phương.