§2. Một số ví dụ về phép dời hình trong không gian

I. MỤC TIÊU

1. Làm cho học sinh nắm được định nghĩa của năm phép dời hình cụ thể : phép tịnh tiến, phép đối xứng qua mặt phẳng, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm và phép quay quanh đường thẳng.

2. Các phép dời hình cụ thể nói trên rất thường gặp trong thực tế, cần làm cho học sinh hình dung được các phép đó biến đổi một hình thành hình như thế nào. Từ đó học sinh nhận ra các hình có tính đối xứng cũng thường gặp trong thực tế.

3. Học sinh hiểu được khái niệm về hai hình bằng nhau (trong không gian) mà từ trước đến nay ta chưa bao giờ đề cập đến.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Vì không có khái niệm không gian định hướng nên ta phải định nghĩa phép quay quanh một đường thẳng khác với cách đã nêu trên đây. Ta hình dung rằng khi mặt đất quay quanh trục của nó thì cả bầu khí quyển quanh nó cũng quay theo. Thay mặt đất bằng một mặt phẳng (P) và xem không gian chứa (P) như là bầu khí quyển của (P), tức là nó cố kết với (P). Bởi vậy nếu quay mặt phẳng (P) quanh một điểm O của nó thì cả không gian cũng quay theo. Giả sử M là một điểm nào đó trong không gian, ta lấy M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên (P). Ta xem đoạn thẳng M_0M như là một cái cột gắn chặt với mặt phẳng (P). Nếu khi thực hiện phép quay mặt phẳng (P) quanh điểm O, điểm M_0 di chuyển đến điểm M_0', thì cả cái cột M_0M sẽ di chuyển theo và đến vị trí $M_0'M'$. Phép biến M thành M' được gọi là phép quay trong không gian quanh đường thẳng Δ vuông góc với (P) tại O.

Định nghĩa trong SGK là chính xác hoá những điều mô tả trên đây.

2. Chúng ta biết rằng ngoài năm phép dời hình mà SGK giới thiệu cho học sinh còn có các phép dời hình phức tạp hơn.

Phép xoắn ốc **:** Đó là tích của một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ và một phép quay Q quanh đường thẳng Δ song song với vectơ $\vec{v}$. Chú ý rằng trong trường hợp này tích đó giao hoán được, nghĩa là $T_{o}Q = Q_{o}T$.

Hai trường hợp đặc biệt của phép xoắn ốc là phép tịnh tiến (khi góc quay của Q bằng $2k\pi$), và phép quay (khi vectơ $\vec{v} = \vec{0}$)

Phép đối xứng trượt : Đó là tích của một phép tịnh tiến T và một phép đối xứng $Đ$ qua một mặt phẳng song song với vectơ tịnh tiến của T. Tích đó giao hoán được.

Một trường hợp đặc biệt của phép đối xứng trượt là phép đối xứng qua mặt phẳng (khi vectơ tịnh tiến của T là vectơ $\vec{0}$).

Phép đối xứng quay : Đó là tích của một phép đối xứng $Đ$ qua một mặt phẳng (P) và phép quay Q quanh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P). Tích đó giao hoán được.

Một trường hợp đặc biệt của phép đối xứng quay là phép đối xứng qua mặt phẳng (khi góc quay của Q bằng $2k\pi$).

3. Phép dời hình gọi là *phép dời hình thuận* nếu nó biến một cơ sở của không gian thành một cơ sở cùng hướng, và gọi là *phép dời hình nghịch* nếu nó biến một cơ sở của không gian thành cơ sở có hướng ngược lại.

Ta dễ dàng chứng minh được rằng:

1) Phép đối xứng qua mặt phẳng là một phép dời hình nghịch.

2) Phép tịnh tiến là phép dời hình thuận vì mọi phép tịnh tiến đều là tích của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng song song.

3) Phép quay quanh đường thẳng là phép dời hình thuận vì mọi phép quay đều là tích của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng đi qua trục của phép quay.

4) Phép đối xứng tâm là phép dời hình nghịch vì nó là tích của ba phép đối xứng qua ba mặt phẳng đôi một vuông góc.

4. Ta có thể chứng minh được rằng :

Mọi phép dời hình thuận đều là một phép xoắn ốc, và mọi phép dời hình nghịch đều là phép đối xứng trượt hoặc phép đối xứng quay.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

HĐ1. Nếu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành M' và N' thì:

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}, \text{ do đó } \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}, \text{ suy ra } M'N' = MN.$$

Vậy phép tịnh tiến là phép dời hình.

$\boxed{?1}$ a) d trùng d'.

b) d song song với d'.

$\boxed{?2}$ Có phép tịnh tiến biến hình lập phương $\boldsymbol{H_1}$ thành hình lập phương $\boldsymbol{H_4}$. Có phép tịnh tiến biến hình lập phương $\boldsymbol{H_2}$ thành hình lập phương $\boldsymbol{H_3}$

HĐ2. Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) thì trong mặt phẳng (Q) hai điểm M', N' là đối xứng với hai điểm M, N qua đường thẳng d. Bởi vậy $M'N' = MN$.

$\boxed{?3}$ • (α) và (α') cắt nhau khi (α) và (P) cắt nhau và không vuông góc với nhau.

- (α) và (α') song song khi (α) và (P) song song.
- (α) và (α') trùng nhau khi (α) và (P) trùng nhau, hoặc vuông góc với nhau.
- (α) và (α') vuông góc khi góc giữa (α) và (P) bằng 45^{o}.

HĐ3. Nếu phép đối xứng qua tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} \text{ và } \overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}.$$

Suy ra $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{MN}$

và do đó $M'N' = MN$.

Bởi vậy phép đối xứng tâm là phép dời hình.

$\boxed{?4}$ Qua phép quay Q mỗi điểm M của mặt phẳng (P) biến thành điểm M' mà M' là ảnh của M qua phép quay q của mặt phẳng (P). Từ đó suy ra Q biến điểm O thành điểm O.

HĐ4. Khi $\varphi = 180^o$ thì hai điểm M_0 và M_1 đối xứng với nhau qua điểm O, từ đó suy ra Δ đi qua trung điểm của MM' và vuông góc với MM'.

$\boxed{?5}$ Hình hộp tuỳ ý có tâm đối xứng, đó là giao điểm của các đường chéo.

$\boxed{?6}$ Nếu $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều thì bốn mặt phẳng đối xứng của nó là : mp(SAC), mp(SBD), mp(SMN) với M, N là trung điểm hai cạnh đáy AB và CD, mp(SUV) với U, V là trung điểm hai cạnh đáy AD và BC.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

3. a) Đường thẳng chứa vectơ $\vec{v}$ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P).

b) Vectơ $\vec{v}$ nằm trên đường thẳng cắt mặt phẳng (P).

c) Không bao giờ.

4. a) (α) // (α').

b) (α) trùng (α').

c) (α) cắt (α').

d) (α) trùng (α').

e) $(\alpha) \perp (\alpha')$.

5. a) d // d'.

b) d trùng d'.

c) d cắt d'.

d) d trùng d'.

6. a) Đúng. Trục đối xứng là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng của hình bình hành tại tâm của hình bình hành.

b) và c) đều đúng, các trục đối xứng là các đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh đối diện.

7. a) Sai. Mặt phẳng của hình bình hành là mặt phẳng đối xứng của hình bình hành đó.

b) Đúng. Đó là mặt phẳng chứa tam giác.

c) Đúng. Các trục đối xứng của hình vuông $ABCD$ là : đường thẳng AC, đường thẳng BD, đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD, đường thẳng đi qua trung điểm của AD và BC, đường thẳng vuông góc với mp($ABCD$) tại tâm O của hình vuông.

d) Đúng. Các mặt phẳng đối xứng của hình vuông $ABCD$ là : mặt phẳng ($ABCD$), các mặt phẳng vuông góc với mp($ABCD$) và lần lượt đi qua các đường thẳng : AC, BD, đường thẳng đi qua trung điểm của AB và CD, đường thẳng đi qua trung điểm của AD và BC.

e) Sai. Các đường cao của tam giác đều là các trục đối xứng của tam giác đều.

f) Đúng.

Ví dụ : Đường thẳng, mặt phẳng, cặp mặt phẳng song song...

g) Đúng. Nếu hình phẳng $\boldsymbol{H}$ có tâm đối xứng O thì $\boldsymbol{H}$ có trục đối xứng là đường thẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa $\boldsymbol{H}$.

8. Vì có phép tịnh tiến biến đáy này thành đáy kia. Nếu AA' là một cạnh bên của lăng trụ thì vectơ tịnh tiến là $\overrightarrow{AA'}$.

Chú ý : Một số bài tập trên đây chỉ yêu cầu học sinh chỉ ra một số phép dời hình thoả mãn các tính chất nào đó, chứ không yêu cầu phải chỉ ra tất cả các phép dời hình như vậy. Chẳng hạn ta không yêu cầu học sinh chỉ ra tất cả các trục đối xứng của hình tứ diện gần đều mà chỉ yêu cầu chỉ ra ba trục đối xứng là được. Như vậy trong bài tập 5, câu trả lời là : *"Mệnh đề b) và c) đúng"* vì ta có thể chỉ ra ba phép đối xứng trục.

Thực ra ngoài ba phép đó không còn phép đối xứng trục nào khác, nhưng chứng minh điều đó là quá khó đối với học sinh.

Để làm ví dụ ta hãy chứng minh mệnh đề *"Hình tứ diện gần đều có ba trục đối xứng"*.

Chứng minh. Trước hết phải chứng minh bổ đề :

Nếu phép dời hình biến tứ diện thành tứ diện thì nó phải biến đỉnh của tứ diện này thành đỉnh của tứ diện kia.

Sau đó chứng minh tiếp như sau :

Giả sử $ABCD$ là tứ diện gần đều, tức là $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$.

Nếu Δ là trục đối xứng của hình tứ diện đó thì phép đối xứng *Đ* qua Δ biến tứ diện $ABCD$ thành chính nó. Trước hết ta nhận thấy rằng :

Trục đối xứng Δ không trùng với đường thẳng đi qua hai đỉnh nào đó của tứ diện. Thật vậy nếu Δ trùng với đường thẳng AB thì rõ ràng phép đối xứng *Đ* không biến hai điểm C, D thành hai điểm đó, vậy Δ không phải là trục đối xứng của tứ diện.

Trục đối xứng Δ không đi qua đỉnh nào của tứ diện. Thật vậy giả sử Δ đi qua điểm A, tức là phép đối xứng *Đ* biến A thành A. Khi đó theo a) thì B không nằm trên Δ nên B sẽ biến thành C hoặc D. Nếu B biến thành C thì C biến thành B và do đó D biến thành chính nó, tức là Δ trùng với AD, vô lí. Tương tự nếu B biến thành D thì Δ trùng với AC, vô lí.

Tóm lại ta đã chứng minh rằng nếu Δ là trục đối xứng của tứ diện $ABCD$ thì Δ không đi qua đỉnh nào của tứ diện. Từ đó suy ra phép đối xứng *Đ* qua Δ biến điểm A thành một trong các điểm B, C, hoặc D. Nếu A biến thành B thì hiển nhiên C biến thành D. Vậy Δ chính là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD (cố nhiên khi đó ta phải có $AC = BD$ và $AD = BC$, điều đó nằm trong giả thiết $ABCD$ là tứ diện gần đều). Tương tự như thế Δ có thể là đường thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối còn lại.