§2 Phương trình mặt phẳng

I. MỤC TIÊU

Yêu cầu học sinh :

1. Hiểu được rằng trong không gian toạ độ, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

trong đó ba số A, B, C không đồng thời bằng 0 (hoặc tương đương với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, hay $A.B.C \neq 0$), ngược lại mỗi phương trình như thế đều là phương trình của một mặt phẳng nào đó.

2. Khi cho phương trình của mặt phẳng, học sinh phải xác định được vectơ pháp tuyến của nó, xác định được tọa độ của một số điểm của nó. Học sinh nhận ra các trường hợp đặc biệt về vị trí của mặt phẳng căn cứ trên phương trình của chúng

3. Nắm vững cách viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và có vectơ pháp tuyến cho trước, đồng thời biết cách đưa về trường hợp cơ bản đó để viết phương trình mặt phẳng trong những trường hợp khác.

4. Có thể nhận biết nhanh chóng vị trí tương đối của hai mặt phẳng căn cứ vào phương trình của chúng.

5. Nhớ và vận dụng được công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng, và áp dụng vào các bài toán khác.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. SGK không đưa ra khái niệm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng và do đó cũng không giới thiệu phương trình tham số của mặt phẳng. Như vậy học sinh chỉ biết một loại phương trình mặt phẳng mà trước đây ta gọi là phương trình tổng quát (nay chỉ nói gọn là phương trình mặt phẳng mà thôi).

2. Các thầy cô giáo cần lưu ý rằng học sinh ban Khoa học xã hội và nhân văn không biết khái niệm về tích có hướng của hai vectơ. Bởi vậy để giải bài toán :

"Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C khi biết toạ độ ba điểm đó"

ta cần hướng dẫn cho học sinh làm theo một trong hai cách sau đây :

Cách 1 : Mặt phẳng cần tìm có phương trình $ax + by + cz + d = 0$. Thay toạ độ các điểm A, B, C vào phương trình trên ta được một hệ thuần nhất gồm ba phương trình với bốn ẩn số a, b, c, d. Khử d từ hệ đó ta được hai phương trình thuần nhất với ba ẩn số a, b, c. Tiếp tục khử đi một ẩn số, c chẳng hạn ta được phương trình dạng $ma + nb = 0$, khi đó ta có thể lấy $a = n$ thì $b = -m$ và tìm được c và d theo m và n.

Cách 2 : Vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ của mặt phẳng (ABC) phải thoả mãn điều kiện

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \text{ và } \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

Từ đó ta đi đến hệ phương trình thuần nhất gồm ba ẩn số a, b, c rồi giải như trên ta tìm được một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) và do đó viết được phương trình của nó.

3. Công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng được đưa ra và không chứng minh vì nó hoàn toàn tương tự như trong hình học phẳng. Chỉ cần làm cho học sinh nhớ được công thức đó và vận dụng nó trong các bài toán tìm khoảng cách khác : khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song...

Cũng xin lưu ý rằng SGK không nêu điều kiện để hai điểm nằm cùng phía hay khác phía đối với một mặt phẳng.

4. SGK không có một mục riêng nói về góc (góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng). Học sinh đã biết cách tính góc giữa hai vectơ, và từ đó tính được góc giữa hai đường thẳng. Ngoài ra ở lớp 11, khái niệm góc của đường thẳng và mặt phẳng được định nghĩa dựa vào góc giữa hai đường thẳng.

IV. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

HĐ1. Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}$. Ta có

$$I = (-2\,;\,-1\,;\,2) \text{ và } \overrightarrow{AB} = (-6\,;\,2\,;\,-2),$$

Vậy mặt phẳng (P) có phương trình :

$$-6(x+2)+2(y+1)-2(z-2)=0, \text{ hay } 3x-y+z+3=0.$$

HĐ2. Giả sử $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ là một nghiệm của phương trình :

$$Ax+By+Cz+D=0 \ (2) \quad (\text{với } A^2+B^2+C^2>0),$$

tức là $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ hay $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A ; B ; C)$ thì (P) có phương trình :

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \text{ hay}$$

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0 \text{ tức } Ax+By+Cz+D=0$$

đây chính là phương trình (2).

HĐ3

Mặt phẳng (α) đi qua gốc toạ độ $O(0 ; 0 ; 0)$ khi và chỉ khi

$$A.0+B.0+C.0+D=0.$$

Suy ra $D=0$.

2) Mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox khi và chỉ khi $\vec{n}.\vec{i}=0$ (trong đó $\vec{n}=(A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của (α)).

Vậy $A.1+B.0+C.0=0$ hay $A=0$.

Tương tự : Mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy khi và chỉ khi $B=0$

Mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz khi và chỉ khi $C=0$.

3) Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy) khi và chỉ khi $\vec{n}$ và $\vec{k}$ cùng phương hay là $A=B=0$.

Tương tự : Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oyz) khi và chỉ khi $B=C=0$.

Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxz) khi và chỉ khi $A=C=0$.

$\boxed{?1}$ Nếu hai mặt phẳng (α) và (α') song song hoặc trùng nhau thì hai vectơ $\vec{n}(A;B;C)$ và $\vec{n'}(A';B';C')$ cùng phương. Bởi vậy nếu hai vectơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ không cùng phương, tức là $A : B : C \neq A' : B' : C'$, thì (α) và (α') cắt nhau.

HĐ4.

a) Nếu $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$ thì có số t sao cho

$$A = tA',\ B = tB',\ C = tC',\ D = tD'.$$

Khi đó :

Điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ thuộc $(\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$$\Leftrightarrow A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D' = 0$$

$\Leftrightarrow M_0$ thuộc (α').

Vậy trường hợp này xảy ra khi và chỉ khi (α) và (α') trùng nhau.

b) Từ kết quả câu a) suy ra nếu $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$ thì hai mặt phẳng (α) và (α') song song.

HĐ5 a) (α) và (β) song song khi $\dfrac{2}{1} = \dfrac{m}{2} = \dfrac{10}{3m+1} \neq \dfrac{1}{-10}$.

Dễ thấy rằng không có số m như thế.

b) Cũng không có m để (α) và (β) trùng nhau.

c) Vậy với mọi m hai mặt phẳng (α) và (β) luôn luôn cắt nhau.

d) (α) và (β) vuông góc khi hai vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc, tức là :

$$2 + 2m + 10(3m+1) = 0 \text{ hay } m = -\frac{3}{8}.$$

HĐ6. Hai mặt phẳng đó song song với nhau. Bởi vậy khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách từ một điểm M nào đó của mặt phẳng thứ nhất đến mặt phẳng thứ hai.Ta có thể lấy

$$M = (0 ; 0 ; 3)$$

và khoảng cách d cần tìm là :

$$d = \frac{|4.3 + 4|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP.

13. a) *Cách1 :*

Phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Toạ độ của các điểm M, N, P là nghiệm của phương trình đó nên :

$$\begin{cases} 2A - C + D = 0 & (1) \\ A - 2B + 3C + D = 0 & (2) \\ B + 2C + D = 0. & (3) \end{cases}$$

Ta khử D từ các phương trình trên (bằng cách lấy (1) trừ cho (2) và lấy (2) trừ cho (3)) :

$$\begin{cases} A + 2B - 4C = 0 \\ A - 3B + C \quad = 0. \end{cases}$$

Khử A từ hai phương trình trên ta được

$5B - 5C = 0$ hay $B = C$ và do đó $A = 2C$, $D = -3C$.

Ta được phương trình : $2Cx + Cy + Cz - 3C = 0$.

Hiển nhiên $C \neq 0$ (vì nếu $C = 0$ thì $A = B = C = 0$), nên chia hai vế của phương trình cho C tức là lấy $C = 1$ ta được :

$$2x + y + z - 3 = 0.$$

Cách 2. Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (MNP) thì $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$, tức là $\vec{n}.\overrightarrow{MN} = 0$ và $\vec{n}.\overrightarrow{MP} = 0$. Vì $\overrightarrow{MN} = (-1\ ; -2\ ; 4)$ và $\overrightarrow{MP} = (-2\ ; 1\ ; 3)$ nên ta có :

$$\begin{cases} -a - 2b + 4c = 0 \\ -2a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 2b + 4c = 0 \\ -5a + 10c = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra : $a = 2c, b = c.$.

Vậy $\vec{n} = (2c ; c ; c)$. Vì $\vec{n} \neq \vec{0}$ nên $c \neq 0$ và ta có thể lấy $c = 1$ để được một vectơ pháp tuyến là (2 ; 1 ; 1).

Vậy mặt phẳng (MNP) có phương trình :

$$2(x - 2) + 1.(y - 0) + 1.(z + 1) = 0 \text{ hay } 2x + y + z - 3 = 0.$$

b) *Cách 1 :*

Mặt phẳng (P) song song với Oz nên có phương trình :

$$ax + by + d = 0 \text{ với } d \neq 0.$$

Mặt phẳng (P) đi qua A và B nên toạ độ A và B thoả mãn phương trình đó :

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ 5a + 2b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4a + b = 0.$$

Từ đó suy ra ta có thể lấy $a = 1$ và $b = -4$ và do đó $d = 3$ và được phương trình của (P) là $x - 4y + 3 = 0$.

Cách 2. Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a ; b ; c)$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB} = (4 ; 1 ; 2)$ và vuông góc với vectơ $\vec{k}(0 ; 0 ; 1)$ (là vectơ chỉ phương của trục Oz).

Bởi vậy ta phải có : $4a + b + 2c = 0$ và $c = 0$.

Vậy ta có thể lấy $a = 1, b = -4, c = 0$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua $A(1 ; 1 ; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1 ; -4 ; 0)$ nên có phương trình

$$1.(x - 1) - 4(y - 1) = 0 \text{ hay } x - 4y + 3 = 0.$$

c) Mặt phẳng (P) cần tìm phải song song với mặt phẳng

$$x - 5y + z = 0$$

nên hai mặt phẳng có cùng vectơ pháp tuyến là (1 ; –5 ; 1).

Ngoài ra mặt phẳng (P) phải đi qua điểm (3 ; 2 ; –1) nên nó có phương trình là :

$$(x - 3) - 5(y - 2) + (z + 1) = 0 \text{ hay } x - 5y + z + 8 = 0.$$

d) Mặt phẳng (P) cần tìm phải vuông góc với mặt phẳng

$$x - y + z + 1 = 0$$

nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) phải vuông góc với

$$\overrightarrow{n'} = (1; -1; 1).$$

Mặt khác vì mặt phẳng (P) lại đi qua hai điểm A, B nên $\vec{n}$ phải vuông góc với

$$\overrightarrow{AB} = (-1 ; -1 ; 1),$$

Vậy nếu $\vec{n} = (a; b; c)$ thì ta phải có

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -a - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}.$$

Ta có thể lấy vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(0 ; 1 ; 1)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm là

$$(y - 1) + (z - 1) = 0 \text{ hay } y + z - 2 = 0.$$

e) Giả sử $A = (a ; 0 ; 0)$, $B = (0 ; b ; 0)$ và $C = (0 ; 0 ; c)$.

Vì $G(1 ;2 ;3)$ là trọng tâm tam giác ABC nên :

$$\frac{a + 0 + 0}{3} = 1 \;\; ; \frac{0 + b + 0}{3} = 2 \;\; ; \;\; \frac{0 + 0 + c}{3} = 3,$$

suy ra $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.

Vậy phương trình (theo đoạn chắn) của mặt phẳng cần tìm là :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$$

f) Nếu mặt phẳng đi qua $H(2 ; 1 ; 1)$ cắt các trục toạ độ tại A, B, C thì tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc, bởi vậy H là trực tâm giác ABC khi và chỉ khi OH vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Vậy mặt phẳng (ABC) đi qua H và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OH} = (2 ; 1 ; 1)$ nên nó có phương trình :

$$2(x - 2) + (y - 1) + (z - 1) = 0 \text{ hay } 2x + y + z - 6 = 0.$$

14. a) Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương : Hai mặt phẳng cắt nhau.

b) Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương : Hai mặt phẳng cắt nhau

c) Hệ phương trình vô nghiệm : Hai mặt phẳng song song.

d) Hai vectơ pháp tuyến không cùng phương : Hai mặt phẳng cắt nhau

e) Các hệ số của hai phương trình tương ứng tỉ lệ : Hai mặt phẳng trùng nhau.

15. a) Hai mặt phẳng đã cho song song khi và chỉ khi :

$$\frac{2}{m} = \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{3}{7}.$$

Vậy $n = -1,\ m = -4.$

b) Hai mặt phẳng đã cho song song khi và chỉ khi

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{n} = \frac{m}{2} \neq \frac{-2}{8}.$$

Vậy $m = 4,\ n = \frac{1}{2}.$

16. Hai mặt phẳng đã cho có các vectơ pháp tuyến là

$$\overrightarrow{n_1}(2; -m; 3),\ \overrightarrow{n_2} = (m+3\,; -2\,; 5m+1).$$

Hai vectơ đó cùng phương khi và chỉ khi :

$$\frac{m+3}{2} = \frac{-2}{-m} = \frac{5m+1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{m+3}{2} = \dfrac{2}{m} \\ \dfrac{m+3}{2} = \dfrac{5m+1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 7m = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m = 1.$$

Khi $m = 1$ hai mặt phẳng đã cho có các phương trình

$x - y + 3z - 5 = 0$ và $4x - 2y + 6z - 10 = 0$ nên chúng trùng nhau.

Vậy ta có :

a) Không có giá trị m để cho hai mặt phẳng đó song song.

b) Khi $m = 1$ hai mặt phẳng đó trùng nhau.

c) Khi $m \neq 1$ hai mặt phẳng đó cắt nhau.

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$$

hay :

$$2(m+3) + 2m + 3(5m+1) = 0 \Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{19}.$$

17. a) Điểm $M(x;y;z)$ cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi :

$$\frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9+25+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}|2x - y + 4z + 5| = \sqrt{3}|3x + 5y - z - 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}(3x + 5y - z - 1).$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng :

$$\left(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}\right)x - \left(\sqrt{5} - 5\sqrt{3}\right)y + \left(4\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0$$

$$\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right)x - \left(\sqrt{5} + 5\sqrt{3}\right)y + \left(4\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0$$

b) Tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng có phương trình :

$$-4x + 6y - 20z - 1 = 0$$

$$32x - 2y - 8z - 13 = 0.$$

c) Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng có phương trình :

$$x + y + z + 2 = 0.$$

18. Hai mặt phẳng đã cho song song với nhau. Lấy điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ nằm trên mặt phẳng thứ nhất, tức là

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \text{ hay } Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D,$$

thì khoảng cách d giữa hai mặt phẳng bằng khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng thứ hai, tức là :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

19. $M \in Oz$ nên $M = (0 ; 0 ; c)$.

a) Khoảng cách *MA* bằng khoảng cách từ *M* tới mặt phẳng đã cho nên :

$$MA = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4-c)^2} = \frac{|c-17|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 13 + (4-c)^2 = \frac{(c-17)^2}{14}.$$

Từ đó suy ra $c = 3$. Vậy $M = (0;0;3)$.

b) Điểm *M* cách đều hai mặt phẳng đã cho nên :

$$\frac{|-c+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|c+5|}{\sqrt{3}} \text{ hay } c = -2.$$

Vậy $M = (0 ; 0 ; -2)$

20. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với Ox, Oy, Oz lần lượt là OA, OB, OC. Khi đó ta có $A = (a ; 0 ; 0)$, $B = (0 ; b; 0)$, $C = (0 ; 0 ; c)$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a ; b ; 0)$,

$\overrightarrow{AC} = (-a ; 0 ; c)$

nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$.

Vậy góc *A* của tam giác *ABC* là góc nhọn. Chứng minh tương tự các góc *B* và *C* của tam giác đó cũng nhọn.

b) Mặt phẳng (*ABC*) có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (*ABC*) là

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{a} ; \frac{1}{b} ; \frac{1}{c}\right).$$

Mặt phẳng (OBC) chính là mặt phẳng (Oyz) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, nên nếu α là góc hợp bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (OBC) thì :

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{\left|\vec{n}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{i}\right|}\right)^2 = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Tương tự ta có $\cos^2\beta = \dfrac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$;

$$\cos^2\gamma = \frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

21. Mặt cầu đã cho có tâm là $I(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{1^2+2^2+3^2+2} = 4.$$

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng

$$4x + 3y - 12z + 1 = 0$$

nên có phương trình :

$$4x + 3y - 12z + D = 0 \text{ với } D \neq 1.$$

Khoảng cách d từ I tới mặt phẳng (P) là :

$$d = \frac{|4+6-36+D|}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{|-26+D|}{13}.$$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi $d = R$, hay :

$$\frac{|-26+D|}{13} = 4 \Leftrightarrow |-26+D| = 52$$

$$\Leftrightarrow -26 + D = \pm 52 \Leftrightarrow D = 78 \text{ hoặc } D = -26.$$

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu :

$$4x + 3y - 12z + 78 = 0 \text{ và } 4x + 3y - 12z - 26 = 0.$$