§2. Thể tích của khối đa diện

I. MỤC TIÊU

Làm cho học sinh hiểu được khái niệm thể tích của khối đa diện, các công thức tính thể tích một số khối đa diện đơn giản. Từ đó học sinh có thể vận dụng để tính thể tích các khối đa diện phức tạp hơn hoặc để giải một số bài toán hình học.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Lí thuyết về thể tích của các khối đa diện khá phức tạp, không thể trình bày một cách chặt chẽ và đầy đủ cho học sinh phổ thông.

Sau đây chúng tôi xin trình bày sơ lược về lí thuyết đó :

1. Định nghĩa

a) Hàm thể tích

Gọi Ω là tập hợp các khối đa diện trong không gian. Hàm số

$$V : \Omega \to \boldsymbol{R}$$

được gọi là *hàm thể tích* nếu nó thoả mãn các tính chất sau đây :

i) Với mọi khối đa diện $\boldsymbol{H}$ ta có $V(\boldsymbol{H}) > 0$.

ii) Nếu hai khối đa diện $\boldsymbol{H}$ và $\boldsymbol{H}'$ bằng nhau thì $V(\boldsymbol{H}) = V(\boldsymbol{H}')$.

iii) Nếu khối đa diện $\boldsymbol{H}$ được phân chia thành hai khối đa diện $\boldsymbol{H}_1$ và $\boldsymbol{H}_2$ thì

$$V(\boldsymbol{H}) = V(\boldsymbol{H}_1) + V(\mathbf{H}_2).$$

iv) Nếu $\boldsymbol{C}$ là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì

$$V(\boldsymbol{C}) = 1.$$

b) Thể tích của khối đa diện

Nếu hàm thể tích V tồn tại và duy nhất thì giá trị $V(\boldsymbol{H})$ được gọi là *thể tích của khối đa diện* $\boldsymbol{H}$.

Sau đây, tạm thời giả thiết rằng hàm thể tích V tồn tại (điều này được chứng minh sau), ta đi tìm công thức tính thể tích khối lăng trụ và khối chóp. Ta có

2. Thể tích khối lăng trụ và khối chóp

a) Thể tích của khối hộp chữ nhật

Thể tích V của khối hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c là

$$V = abc.$$

(Công thức này hiển nhiên đúng khi a, b, c là những số nguyên, khi chúng là số thực bất kì ta phải dùng đến phép tính về giới hạn).

b) Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông

Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông bằng $\mathscr{B}h$, trong đó $\mathscr{B}$ là diện tích đáy của lăng trụ và h là chiều cao của lăng trụ.

(Bằng cách ghép hình lăng trụ đứng như thế với một khối lăng trụ bằng nó sao cho ta được một khối hộp chữ nhật, ta suy ra điều phải chứng minh).

c) Thể tích của khối lăng trụ đứng bất kì

Thể tích của khối lăng trụ đứng bất kì bằng $\mathscr{B}h$, với $\mathscr{B}$ là diện tích đáy và h là chiều cao

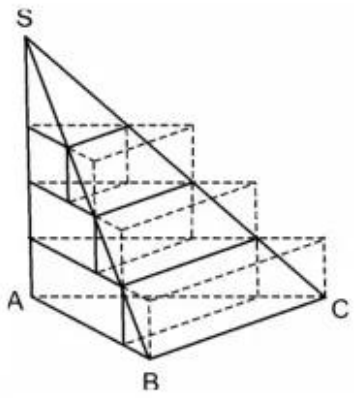
(Chứng minh bằng cách chia hình lăng trụ đứng đã cho thành các hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông. Muốn vậy ta chia đáy hình lăng trụ đã cho thành các tam giác, và mỗi tam giác chia thành hai tam giác vuông).

d) Thể tích của khối chóp tam giác

Thể tích của khối chóp tam giác bằng $\frac{1}{3}\mathscr{B}h$, với $\mathscr{B}$ là diện tích đáy, h là chiều cao.

Chứng minh. (h. 20)

Trước hết ta xét khối đa diện $\boldsymbol{H}$ là hình chóp tam giác $S.ABC$ có diện tích đáy ABC là $\mathscr{B}$ và có đường cao là một trong các cạnh bên, chẳng hạn đó là cạnh $SA = h$.



Hình 20

Chia đoạn thẳng SA thành n phần bằng nhau bởi các điểm $S = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = A$, và qua các điểm A_i vẽ các mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) ta được các thiết diện là các tam giác $A_iB_iC_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Dễ thấy rằng diện tích các tam giác đó là :

$$\mathscr{B}_i = \frac{i^2}{n^2}\mathscr{B}.$$

Ta dùng các kí hiệu :

• $\boldsymbol{H}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ là phần của $\boldsymbol{H}$ nằm giữa hai mặt phẳng : $(A_iB_iC_i)$ và $(A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1})$ tức là khối chóp cụt $A_iB_iC_i.A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ còn $\boldsymbol{H}_0$ là khối chóp $S.A_1B_1C_1$.

Ghép các khối $\boldsymbol{H}_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ta được khối đa diện $\boldsymbol{H}$.

• $\boldsymbol{H}_i^0$ $(i = 1, \ldots n-1)$ là khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác $A_iB_iC_i$ và một cạnh bên là A_iA_{i+1}.

Ghép các khối đa diện $\boldsymbol{H}_i^0$ với nhau ta được khối đa diện $\boldsymbol{H}^0$.

• $\boldsymbol{H}_i^1$ ($i = 0,..., n - 1$) là khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ và một cạnh bên là A_iA_{i+1}.

Ghép các khối đa diện $\boldsymbol{H}_i^1$ ta được khối đa diện $\boldsymbol{H}^1$.

Với các kí hiệu như trên ta dễ dàng suy ra : $\boldsymbol{H}^0 \subset \boldsymbol{H} \subset \mathbf{H}^1$, và do đó từ các tính chất của hàm thể tích V ta suy ra :

$$V(\boldsymbol{H}^0) \leq V(\boldsymbol{H}) \leq V(\boldsymbol{H}^1). \qquad (*)$$

Áp dụng công thức về thể tích của khối lăng trụ đứng ta có :

$$V(\boldsymbol{H}_i^0) = \mathscr{B}_i . \frac{h}{n} = \frac{i^2}{n^3}\mathscr{B}h.$$

Do đó

$$V(\boldsymbol{H}^0) = \sum_{i=1}^{n-1} V(H_i^0) = \frac{1}{n^3}\mathscr{B}h\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\mathscr{B}h\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}\mathscr{B}h\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Tương tự ta có :

$$V(\boldsymbol{H}^1) = \sum_{i=0}^{n-1} V(H_i^1) = \frac{1}{n^3}\mathscr{B}h\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Như vậy bất đẳng thức (*) trở thành :

$$\frac{1}{3}\mathscr{B}h\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \leq V(\boldsymbol{H}) \leq \frac{1}{3}\mathscr{B}h\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Từ đó, khi cho n tiến tới vô cùng ta suy ra

$$V(\boldsymbol{H}) = \frac{1}{3}\mathscr{B}h.$$

Bây giờ nếu $\boldsymbol{H}$ là khối chóp bất kì $S.ABC$. Kẻ đường cao SI của khối chóp, ta được ba khối chóp $S.IAB$, $S.IBC$ *và* $S.ICA$ đều có cạnh bên SI là đường cao. Từ đó áp dụng kết quả trên ta suy ra điều phải chứng minh.

e) Thể tích của khối chóp

Thể tích của khối chóp bất kì bằng $\frac{1}{3}\mathscr{B}h$, với $\mathscr{B}$ là diện tích đáy, h là chiều cao.

(Chỉ cần phân chia khối chóp bất kì thành các khối chóp tam giác và áp dụng kết quả trên)

f) Thể tích khối lăng trụ

Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao (Làm như trong SGK).

Từ những công thức để tính thể tích trên đây, ta suy ra rằng nếu hàm thể tích V tồn tại thì nó là duy nhất.

Chúng ta lưu ý rằng SGK trình bày phần này đúng theo trình tự trên, tuy nhiên có bỏ qua những chứng minh phải dùng tới giới hạn.

3. Chứng minh sự tồn tại của hàm thể tích V

Trong SGK ta không trình bày vấn đề này vì quá khó đối với học sinh.

Chúng ta bắt đầu bằng cách xây dựng một hàm số

$$V : \Omega \to \boldsymbol{R}$$

như sau :

a) Nếu khối đa diện $\boldsymbol{H}$ là một hình tứ diện thì ta lấy $V(H)$ bằng một phần ba tích số của diện tích một mặt nào đó của tứ diện với chiều cao tương ứng.

Bằng cách dùng tích hỗn tạp của ba vectơ ta có thể chứng minh rằng giá trị $V(\boldsymbol{H})$ không phụ thuộc việc chọn mặt của hình tứ diện để lấy thể tích.

b) Nếu $\boldsymbol{H}$ là một khối đa diện tuỳ ý, ta phân chia nó thành các khối tứ diện

$$\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, .. , \boldsymbol{H}_n.$$

Khi đó ta đặt

$$V(\boldsymbol{H}) = V(\boldsymbol{H}_1) + V(\boldsymbol{H}_2) + ... + V(\boldsymbol{H}_n).$$

Để định nghĩa trên hợp lí ta phải chứng minh rằng giá trị $V(\boldsymbol{H})$ xác định như trên không phụ thuộc vào cách phân chia khối đa diện $\boldsymbol{H}$ thành các khối tứ diện. Chứng minh đó khá dài dòng, chúng tôi trình bày sơ lược như sau, bỏ qua các chi tiết tuy hiển nhiên nhưng chứng minh chặt chẽ thì không phải dễ :

Giả sử khối đa diện $\boldsymbol{H}$ có hai cách phân chia :

Cách thứ nhất chia thành các tứ diện

$$\Delta_i^1,\ i = 1, 2,..., n$$

Cách thứ hai chia thành các tứ diện

$$\Delta_j^2,\ j = 1, 2,...., m.$$

Nếu với i và j nào đó hai tứ diện Δ_i^1 và Δ_j^2 có điểm trong chung thì $\Delta_i^1 \cap \Delta_j^2$ là một khối đa diện lồi (có nhiều nhất 8 mặt). Ta phân chia khối đa diện lồi ấy thành các hình tứ diện Δ_k^*.

Làm như vậy đối với mọi cặp chỉ số (i, j) ta được cách phân chia thứ ba của $\boldsymbol{H}$ thành các tứ diện

$$\Delta_k^*,\ k = 1, 2,... p.$$

Các tứ diện Δ_k^* này có tính chất :

Mỗi một Δ_i^1 (hoặc Δ_j^2) đều được phân chia thành một số các Δ_k^* nào đó.

Từ đó theo định nghĩa của hàm số V đối với các khối đa diện ta suy ra :

$$\sum_{i=1}^{n} V(\Delta_i^1) = \sum_{k=1}^{p} V(\Delta_k^*) = \sum_{j=1}^{m} V(\Delta_j^2).$$

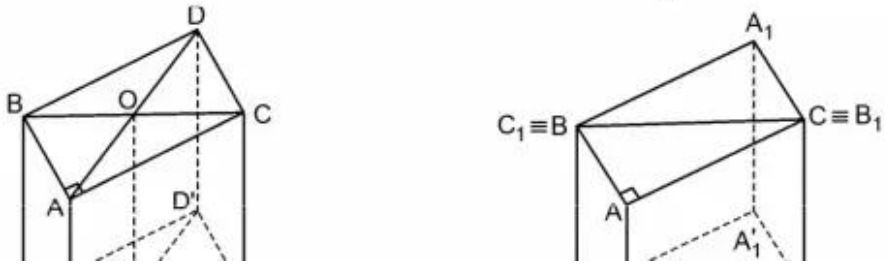
Như vậy là ta có một hàm số

$$V : \Omega \to \boldsymbol{R}.$$

Dễ dàng chứng minh rằng hàm số đó chính là hàm thể tích.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

HĐ1. *Cách 1*. Giả sử $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đứng đã cho (h.21a). Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó phép đối xứng qua đường thẳng OO', biến khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối lăng trụ $DCB.D'C'B'$ và ta được khối hộp chữ nhật $ABDC.A'B'D'C'$ (với các kích thước a, b, h) có thể tích gấp đôi thể tích khối lăng trụ đã cho. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}abh$.



Hình 21a *Hình 21b*

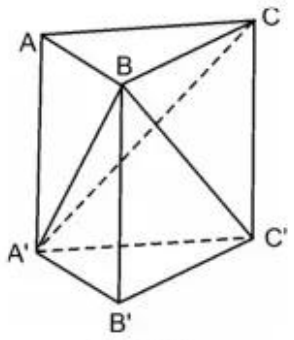
Cách 2. Ghép khối lăng trụ đã cho $ABC.A'B'C'$ với khối lăng trụ $A_1B_1C_1.A_1'B_1'C_1'$ bằng nó sao cho $B_1 \equiv C, C_1 \equiv B$, $B_1' \equiv C'$, $C_1' \equiv B'$, $A_1 \in (ABC)$, $A_1' \in (A'B'C')$ (h. 21b). Khi đó ta được hình hộp chữ nhật $ABA_1C.A'B'A_1'C'$ có thể tích gấp đôi thể tích khối lăng trụ đã cho.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}abh.$

HĐ2. 1) Ba khối tứ diện đó là :

$A'ABC$, $BA'B'C'$, và $A'BCC'$ (h. 21c).

2) Hai khối tứ diện $A'ABC$ và $BA'B'C'$ là hai khối chóp $A'.ABC$ và $B.A'B'C'$ có hai mặt đáy bằng nhau và hai chiều cao tương ứng bằng nhau (đều bằng chiều cao h của khối lăng trụ) nên chúng có thể tích bằng nhau.



Hình 21c

Hai khối tứ diện $BA'B'C'$ và $A'BCC'$ là hai khối chóp $A'.BB'C'$ và $A'.BCC'$ có diện tích đáy bằng nhau và chiều cao tương ứng bằng nhau (bằng khoảng cách từ A' tới mặt phẳng $(BCC'B')$).

Tóm lại thể tích ba khối tứ diện nói trên bằng nhau.

3) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được phân chia thành ba khối tứ diện có thể tích bằng nhau $A'ABC$, $BA'B'C'$ và $A'BCC'$.

Vậy thể tích khối lăng trụ bằng ba lần thể tích khối chóp $A'.ABC$:

$$V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 3.\frac{1}{3}.S_{ABC}.h = S.h.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

8. a) Không thay đổi.

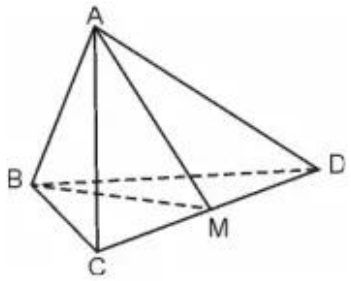
b) Có thể thay đổi.

c) Không thay đổi.

9. Lấy M là trung điểm của CD. Khi đó khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành hai khối tứ diện $ABCM$ và $ABMD$ (h. 22)

Khi đó rõ ràng là

$$V_{ABCM} = V_{ABMD}.$$



Hình 22

10. (h. 23)

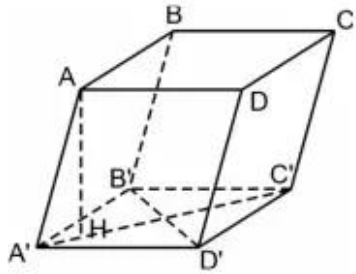
Vì $AA'B'D'$ là tứ diện đều nên đường cao AH của nó có chân H là tâm tam giác đều $A'B'D'$. Suy ra

$$A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Dễ thấy đáy $A'B'C'D'$ là hình thoi có góc $B'A'D'$ bằng 60° nên :

$$S_{A'B'C'D'} = A'B'.A'D'\sin 60^o = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 23

Vậy thể tích khối hộp đã cho là :

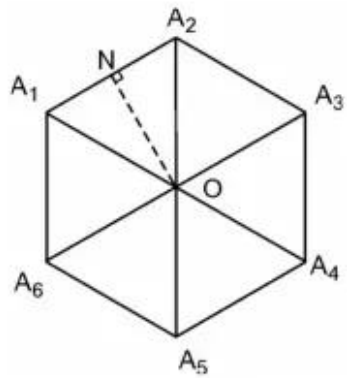
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

11. Gọi $A_1A_2...A_6$ là đáy của khối lăng trụ lục giác đều và O là tâm của lục giác đều $A_1A_2....A_n$ (h. 24). Kẻ $ON \perp A_1A_2$, ta có :

$$ON = A_1N\,\text{cotg}\,\widehat{NOA_1} = \frac{a}{2}\text{cotg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Vậy diện tích đáy của khối lăng trụ đều là :

$$S = 6.S_{OA_1A_2} = 6.\frac{1}{2}A_1A_2.ON = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

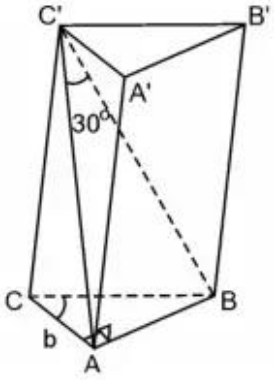


Hình 24

Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đều nên chiều cao của nó bằng cạnh bên tức bằng a, do đó thể tích của khối lăng trụ là

$$V = \frac{3}{2}a^3\sqrt{3}.$$

12. (h. 25)



Hình 25

a) Ta có $BA \perp AC$, $BA \perp AA'$ nên $BA \perp (ACC'A')$.

Vậy AC' là hình chiếu của BC' trên mặt phẳng $(ACC'A')$.

Theo giả thiết, góc $BC'A$ bằng 30° nên

$$AC' = AB\text{cotg}30^o = AC\text{tg}60^o\text{cotg}30^o = b\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3b.$$

b) Ta có

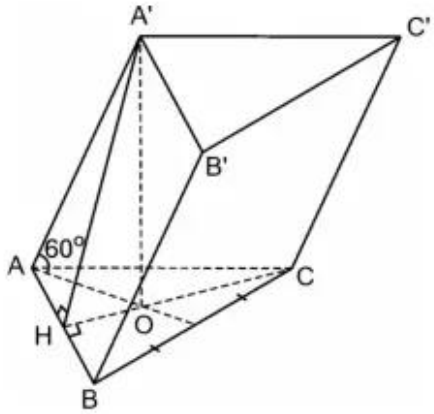
$$CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2.$$

Vậy $CC' = 2b\sqrt{2}$,

do đó thể tích của lăng trụ là :

$$V = S.h = \frac{1}{2}AB.AC.CC' = \frac{1}{2}b\sqrt{3}.b.2b\sqrt{2} = b^3\sqrt{6}.$$

13. (h. 26)



Hình 26

a) Gọi O là tâm tam giác đều ABC.

Vì $A'A = A'B = A'C$

nên $A'O \perp \text{mp}(ABC)$.

Vậy $\widehat{A'AO} = 60^o$.

Từ đó ta có :

$$AA' = 2AO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$A'O = AO\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a.$$

Vậy thể tích cần tìm là :

$$V = S_{ABC}.A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

b) Vì $BC \perp AO$ nên $BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$.

Vậy $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

c) Gọi H là trung điểm của AB, ta có

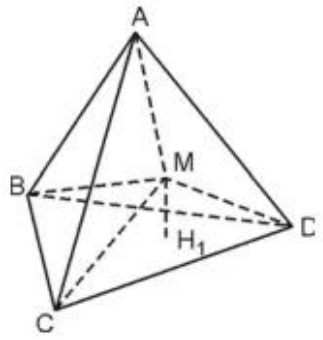
$$S_{xq} = 2S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} = 2A'H.AB + BB'.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{13} + 2\right).$$

14. (h. 27) Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của điểm M lên các mặt phẳng

$$(BCD), (ACD), (ABD), (ABC).$$

Khi đó MH_1, MH_2, MH_3, MH_4 lần lượt là khoảng cách từ điểm M tới các mặt phẳng đó.

Các mặt bên của tứ diện đều có cùng diện tích, ta kí hiệu các diện tích đó là S và h là chiều cao của tứ diện đều.



Hình 27

Ta có :

$$V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} = V_{ABCD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}S.MH_1 + \frac{1}{3}S.MH_2 + \frac{1}{3}S.MH_3 + \frac{1}{3}S.MH_4 = \frac{1}{3}S.h$$

$$\Leftrightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 + MH_4 = h.$$

Vậy tổng khoảng cách từ điểm M tới các mặt của tứ diện đều không phụ thuộc vào vị trí của điểm M nằm trong tứ diện đều đó.

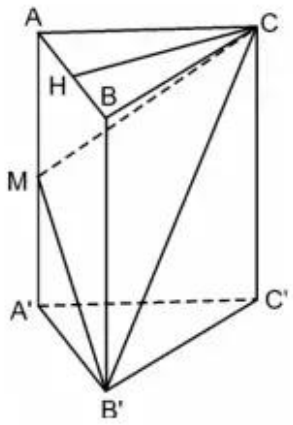
Nếu tứ diện đều có cạnh bằng a thì

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

15. *Cách 1* (h. 28). Mặt phẳng (MCB') chia khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ thành hai khối chóp :

$$C.MABB' \text{ và } B'.MA'C'C.$$

Hai khối chóp đó có chiều cao bằng nhau (bằng chiều cao của tam giác ABC), có đáy là hai hình thang vuông bằng nhau. Suy ra hai khối chóp đó có thể tích bằng nhau.



Hình 28

Cách 2. Gọi độ dài cạnh đáy của khối lăng trụ là a, độ dài cạnh bên là b, ta có :

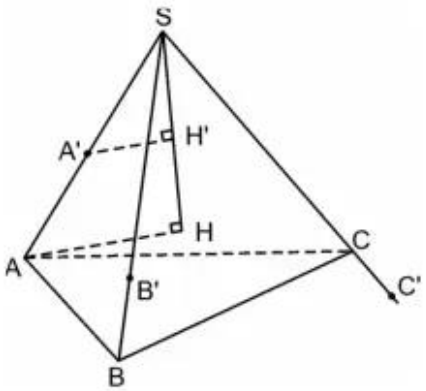
$$V_{C.MABB'} = \frac{1}{3}S_{MABB'}.CH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + b\right)a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2b\sqrt{3}}{8}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}b = \frac{a^2b\sqrt{3}}{4} = 2V_{C.MABB'}$$

$$\Leftrightarrow V_{C.MABB'} = V_{B'.MA'C'C}$$

16. (h. 29) Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu của A và A' trên mặt phẳng (SBC). Khi đó ba điểm S, H, H' thẳng hàng (vì chúng là hình chiếu của ba điểm thẳng hàng S, A, A' trên mặt phẳng (SBC)) và vì $A'H' \parallel AH$ nên

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{SA'}{SA}.$$



Hình 29

Ta có :

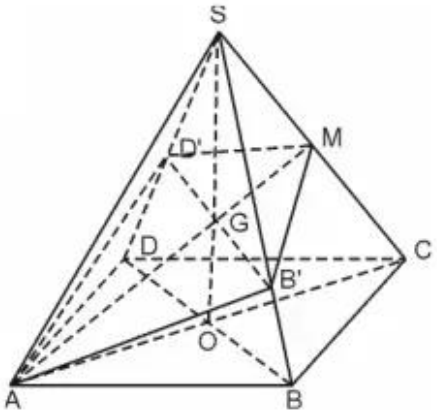
$$\frac{V'}{V} = \frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{SB'C'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{SBC}.AH}$$

$$= \frac{SB'.SC'.A'H'}{SB.SC.AH} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SA'}{SA}.$$

17. (h. 30) Gọi G là giao điểm của AM và SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$) thì G là trọng tâm tam giác SAC. Vậy

$$\frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}.$$

Vì mặt phẳng (P) song song với BD nên nó cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến $B'D'$ đi qua G và $B'D' \parallel BD$ (với $B' \in SB$ và $D' \in SD$).



Hình 30

Suy ra $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3}$.

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần : một là khối chóp $S.AB'MD'$, hai là khối đa diện $ABCDB'MD'$.

Ta có :

$$\frac{V_{SAB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{V_{SMB'D'}}{V_{S.CBD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{9}.$$

Do đó :

$$\frac{V_{SAB'MD'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'D'} + V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

suy ra $V_{ABCDB'MD'} = V_{ABCD} - V_{S.AB'MD'} = \frac{2}{3}$.

Vậy $\frac{V_{SAB'MD'}}{V_{ABCDB'MD'}} = \frac{1}{2}$.

18. a) Giả sử f là phép vị tự tỉ số k biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$. Khi đó f biến đường cao AH của tứ diện $ABCD$ thành đường cao $A'H'$ của tứ diện $A'B'C'D'$. Bởi vậy

$$A'H' = |k|AH.$$

Tam giác BCD được biến thành tam giác $B'C'D'$ qua phép vị tự f nên

$$S_{B'C'D'} = k^2 S_{BCD}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{B'C'D'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{BCD}.AH} = |k|^3.$$

b) Từ giả thiết ta suy ra có phép vị tự tỉ số k biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ và tứ diện $A'B'C'D'$ bằng tứ diện $A_1B_1C_1D_1$.

Vậy :

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = |k|^3 \text{ (theo câu a).}$$