§3. Mặt nón, hình nón, khối nón

70

I. MỤC TIÊU

Yêu cầu học sinh :

1. Nắm được định nghĩa của mặt nón, phân biệt được ba khái niệm : mặt nón, hình nón và khối nón. Xác định được giao của mặt nón với một mặt phẳng vuông góc với trục hoặc đi qua đỉnh của mặt nón, hình nón.

2. Nhớ được công thức tính thể tích của khối nón, diện tích xung quanh của hình nón, và vận dụng vào các bài tập.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Mặt nón dưới dạng tổng quát có thể định nghĩa như sau :

Cho một đường (L) nằm trong mặt phẳng (P) một điểm O không nằm trên (P). Tập hợp gồm điểm O và các điểm M sao cho đường thẳng OM cắt (L) được gọi là một mặt nón đỉnh O và có đường chuẩn là (L). Các đường thẳng OM nói trên được gọi là các đường sinh của mặt nón đó.

Khi (L) là đường tròn và O thuộc trục của đường tròn thì mặt nón trở thành mặt nón tròn xoay. Vậy có thể có nhiều cách định nghĩa mặt nón tròn xoay, ví dụ :

• Mặt nón tròn xoay là hình tạo bởi các tiếp tuyến của mặt cầu cho trước và đi qua một điểm cho trước nằm ngoài mặt cầu.

• Mặt nón tròn xoay là hình gồm tất cả các đường thẳng đi qua một điểm O cố định và tạo với một đường thẳng cố định một góc không đổi $\alpha\,(0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ})$.

• Mặt nón tròn xoay là mặt tròn xoay sinh ra bởi một đường thẳng d khi quay quanh đường thẳng cố định Δ cắt d nhưng không vuông góc với d.

• Mặt nón tròn xoay là tập hợp gồm điểm O nằm trên một đường thẳng cố định Δ và các điểm M khác O sao cho góc hợp bởi OM và Δ bằng α cho trước $(0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ})$.

SGK đã dùng định nghĩa cuối cùng, vì chúng tôi cho là đơn giản nhất.

2. Về hình nón và khối nón nội dung kiến thức của bài học không có gì khó khăn. Tuy nhiên cần làm cho học sinh phân biệt giữa mặt nón, hình nón và khối nón, hiểu rõ khái niệm về trục, đường sinh và bán kính đáy của hình nón.

3. Đối với diện tích hình nón và thể tích khối nón, cũng giống như khối trụ, SGK có nói đến định nghĩa về thể tích và diện tích xung quanh của khối nón và suy ra các công thức mà học sinh phải công nhận ở lớp 9.

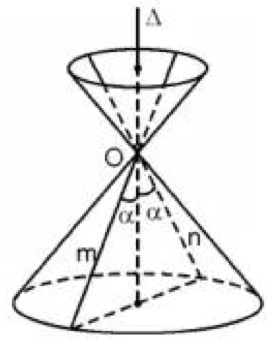
III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

HĐ1 a) Giả sử mặt phẳng (P) đi qua trục Δ của mặt nón N (h. 51)

Trong (P) có hai đường thẳng m và n đi qua O và đều hợp với Δ các góc bằng α (nếu góc ở đỉnh của mặt nón bằng 2α).

Khi đó m và n là hai đường sinh của mặt nón N.

Vậy mặt phẳng (P) cắt mặt nón N theo hai đường sinh m và n đối xứng với nhau qua Δ.



Hình 51

b) Giả sử mặt phẳng (P) vuông góc với Δ tại điểm I khác O (h. 52).

Mỗi đường sinh m của mặt nón cắt (P) tại một điểm M sao cho

$$IM = OI.tg\alpha\ .$$

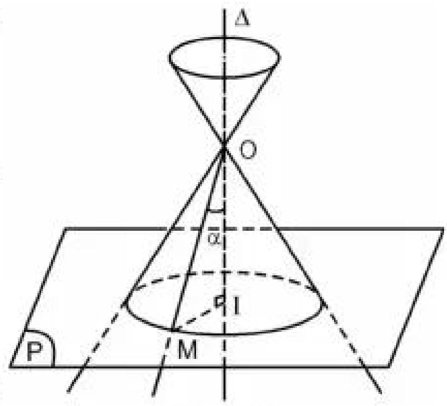
Suy ra M nằm trên đường tròn tâm I bán kính

$$R = OI.tg\alpha$$

và nằm trên (P).

Vậy mặt phẳng (P) cắt mặt nón theo đường tròn đó.

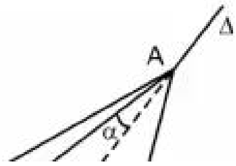
Nếu cắt mặt nón bởi mặt phẳng vuông góc với trục tại O ta được điểm O.



Hình 52

$\boxed{?1}$ Cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác cân OAB với đáy là đường kính AB của đường tròn đáy.

III. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP



14. Giả sử At là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I\ ;R)$ với tiếp điểm là M (h. 53).

Khi đó nếu gọi Δ là đường thẳng AI và α là góc giữa đường thẳng AI và Δ thì

$$\alpha = \widehat{MAI}$$

và do đó

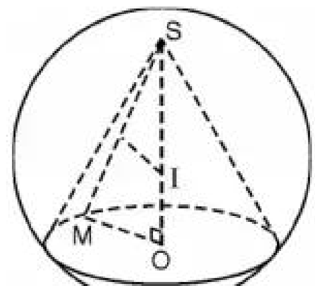
$$\sin\alpha = \frac{MI}{IA} = \frac{R}{IA},$$

Hình 53

suy ra góc α không đổi.

Vậy At là đường sinh của mặt nón N có đỉnh A, trục Δ và góc ở đỉnh bằng 2α.

15. a) Giả sử hình nón N có đỉnh S và đường tròn đáy là $(O\ ;\ r)$ (h. 54).



Hình 54

Lấy điểm M bất kì trên $(O\ ;r)$ thì tam giác SOM vuông ở O.

Trong mặt phẳng (SOM) đường trung trực của đoạn thẳng SM cắt SO tại I.

Khi đó ta có $IS = IM$, ngoài ra vì I nằm trên trục của đường tròn $(O\ ;R)$ nên I cách đều mọi điểm của đường tròn.

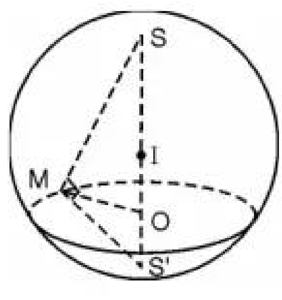
Suy ra mặt cầu tâm I bán kính $R = IS$ chính là mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

b) Gọi SS' là đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón (h. 55).

Tam giác SMS' vuông tại M, có đường cao MO nên :

$$MO^2 = OS.OS' \Rightarrow r^2 = h(SS' - h).$$

Suy ra : $SS' = \dfrac{r^2}{h} + h = \dfrac{r^2 + h^2}{h}$.



Hình 55

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là $R = \dfrac{r^2 + h^2}{2h}$.

c) Nếu hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r, nội tiếp mặt cầu bán kính R thì theo câu b) ta có hệ thức

$$r^2 = h(2R - h).$$

Vậy $$r = \sqrt{h(2R - h)}.$$

Khi đó độ dài đường sinh là

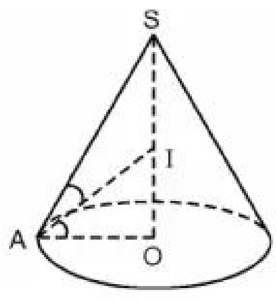
$$l = SM = \sqrt{SS'.SO} = \sqrt{2R.h}.$$

Từ đó suy ra :

$$S_{xq} = \pi rl = \pi\sqrt{h(2R - h)}.\sqrt{2Rh}$$
$$= \pi h\sqrt{2R(2R - h)}.$$

16. a) Giả sử hình nón có đỉnh S và có đáy là đường tròn C(O ; R) (h. 56).

Lấy điểm A nào đó trên đường tròn đáy và gọi I là điểm nằm trên SO sao cho AI là phân giác của góc SAO. Khi đó khoảng cách từ I tới mọi đường sinh của hình nón bằng nhau và bằng khoảng cách IO từ I tới mặt phẳng đáy.



Hình 56

Suy ra mặt cầu tâm I bán kính $r = IO$ chính là mặt cầu nội tiếp hình nón.

b) Ta có : $SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{IO + IS} = \frac{OA}{OA + SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{h}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Vậy bán kính R của mặt cầu nội tiếp là :

$$R = IO = \frac{rh}{r + \sqrt{h^2 + r^2}}.$$