§3. Phép vị tự và phép đồng dạng trong không gian

I. MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Nắm được định nghĩa và tính chất của phép vị tự trong không gian, thấy được sự tương tự như phép vị tự trong mặt phẳng.

2. Nắm được khái niệm về phép đồng dạng và thấy rằng mọi phép đồng dạng đều là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

3. Nắm được khái niệm hai hình đồng dạng trong không gian.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Phép đồng dạng trong không gian gọi là *phép đồng dạng thuận* nếu nó biến một cơ sở của không gian thành một cơ sở cùng hướng, và gọi là phép đồng dạng nghịch nếu nó biến một sơ sở của không gian thành cơ sở không cùng hướng.

Dễ thấy rằng phép vị tự trong không gian với tỉ số k là phép đồng dạng thuận hoặc nghịch tuỳ theo k là số dương hay âm.

Ví dụ : Khi $k = 1$, phép vị tự là phép đồng nhất nên hiển nhiên là phép đồng dạng thuận, còn khi $k = -1$ thì phép vị tự là phép đối xứng tâm nên nó là phép đồng dạng nghịch. (Chú ý rằng trong mặt phẳng thì mọi phép vị tự đều không làm thay hướng của các cơ sở của mặt phẳng, có nghĩa rằng mọi phép vị tự trong mặt phẳng đều là phép đồng dạng thuận mặc dù tỉ số vị tự là dương hay âm).

2. SGK đã có định lí :

Mọi phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) đều là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

Từ đó ta suy ra : Mọi phép đồng dạng thuận (hoặc nghịch) tỉ số k là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình thuận (hoặc nghịch).

3. Ta có thể chứng minh được rằng :

Mọi phép đồng dạng thuận nếu không phải là một phép dời hình, đều là tích của một phép vị tự tỉ số dương và một phép quay quanh đường thẳng đi qua tâm của phép vị tự.

Mọi phép đồng dạng nghịch nếu không phải là phép dời hình, đều là tích của phép vị tự tỉ số dương và phép đối xứng qua mặt phẳng chứa tâm của phép vị tự.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

$\boxed{?1}$ Phép đối xứng qua tâm O là phép vị tự tâm O và tỉ số $k = -1$.

$\boxed{?2}$ Phép đồng nhất là phép vị tự tỉ số $k = 1$ và tâm là điểm bất kì.

$\boxed{?3}$ Hai hình bằng nhau thì đồng dạng với nhau.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

9. a) Sai (xem câu b))

b) Đúng.

c) Sai (phép vị tự tỉ số $k = 1$ biến A thành A và biến B thành B).

d) Đúng.

10. Giả sử phép vị tự có tâm O và tỉ số k. Khi đó nếu hai điểm M, N được biến thành hai điểm M', N' thì :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}.$$

11. Giả sử phép vị tự biến các điểm A, B, C, D lần lượt thành các điểm A', B', C', D' và biến trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ thành điểm G'. Theo bài toán 10 ta có :

$$\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}\,,\ \overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}\,,\ \overrightarrow{G'C'} = k\overrightarrow{GC}\,,\ \overrightarrow{G'D'} = k\overrightarrow{GD}.$$

Suy ra :

$$\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'} = k(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}).$$

Vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ nên ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Từ đó suy ra :

$$\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'} = \vec{0}.$$

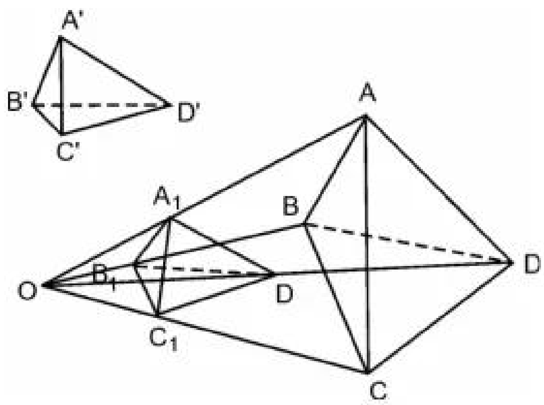
Vậy G' là trọng tâm tứ diện $A'B'C'D'$.

12. Cho hai hình tứ diện đều $ABCD$ và $A'B'C'D'$ với $\dfrac{A'B'}{AB} = k$ (h. 2).

Gọi O là một điểm nào đó thì phép vị tự V tâm O tỉ số k sẽ biến tứ diện đều $ABCD$ thành tứ diện đều $A_1B_1C_1D_1$ mà

$$\frac{A_1B_1}{AB} = k$$

nên $\quad A_1B_1 = A'B'$.



Hình 2

Như vậy hai tứ diện đều $A'B'C'D'$ và $A_1B_1C_1D_1$ bằng nhau nên có phép dời hình f biến $A'B'C'D'$ thành $A_1B_1C_1D_1$. Gọi F là phép đồng dạng hợp thành của phép vị tự V và phép dời hình f thì F biến $ABCD$ thành $A'B'C'D'$ và do đó hai hình tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng với nhau.

Đối với các hình lập phương chứng minh hoàn toàn tương tự.