§3 Phương trình đường thẳng

I. MỤC TIÊU

Yêu cầu học sinh :

1. Nắm được cách viết phương trình tham số của đường thẳng, và trong trường hợp có thể, viết được phương trình chính tắc của đường thẳng.

2. Biết cách xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng khi biết phương trình của chúng ; xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng.

3. Biết cách viết phương trình đường thẳng thoả mãn các điều kiện cho trước, chẳng hạn : đường thẳng đi qua một điểm cho trước và cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước, đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước, hình chiếu của một đường thẳng lên một mặt phẳng cho trước.

4. Biết tính góc và khoảng cách giữa các đối tượng : điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

II. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Ban Khoa học xã hội và nhân văn không có khái niệm phương trình tổng quát của đường thẳng, SGK chỉ giới thiệu phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có). Để có thể viết phương trình tham số của đường thẳng cần biết toạ độ của một điểm nào đó trên đường thẳng và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó. Đó là bài toán cơ bản mà học sinh ban Khoa học xã hội và nhân văn cần nắm vững.

Tuy nhiên, đường thẳng cũng có thể xác định như là giao tuyến của hai mặt phẳng. Bởi vậy học sinh thường gặp bài toán sau đây :

"Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) *và* (β) *lần lượt có phương trình :*

$$\begin{aligned} &Ax + By + Cz + D = 0 \\ &A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng Δ *là giao tuyến của hai mặt phẳng đó."*

Đối với ban Khoa học tự nhiên thực chất của bài toán đó là việc chuyển từ phương trình tổng quát của đường thẳng sang phương trình tham số.

Đối với ban Khoa học xã hội và nhân văn ta cần làm cho học sinh hiểu được bản chất của các cách giải bài toán trên như sau :

• (α) và (β) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}(A ; B ; C)$, $\vec{n'}(A';B';C')$ nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b ; c)$ vuông góc với $\vec{n}$ và $\vec{n'}$. Vậy $(a ; b ; c)$ là một nghiệm không tầm thường của hệ phương trình thuần nhất với ẩn số a, b, c :

$$\begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ A'a + B'b + C'c = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Để tìm toạ độ của một điểm nào đó trên Δ ta chỉ cần lấy một nghiệm $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nào đó của hệ :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}. \qquad (**).$$

Vậy Δ chính là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b ; c)$.

• Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên Δ gồm những điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

Vì hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau nên có ít nhất một trong ba định thức sau đây khác không

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} C & A \\ C' & C' \end{vmatrix}$$

Nếu định thức

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$$

thì bằng cách đặt $z = t$ và từ hệ (**) ta tìm được x và y theo t, tức là ta có hệ :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = t \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng Δ.

• Tìm hai điểm M_1, M_2, thuộc Δ tức là hai nghiệm phân biệt của hệ

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0. \end{cases}$$

Khi đó Δ chính là đường thẳng đi qua M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Chúng ta cần lưu ý cho học sinh về các phương pháp để xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng và các mặt phẳng.

a) Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng rất dễ nhận biết bằng cách nhìn vào phương trình của chúng, như đã nói ở **§2.**

b) Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng và mặt phẳng

Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng ta có thể xét vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Nhưng nếu cần chỉ ra toạ độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng thì ta nên dùng cách giải hệ phương trình. Ví dụ một đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số tức là hệ ba phương trình bậc nhất biểu thị x, y, z theo t, còn mặt phẳng (α) cho bởi phương trình bậc nhất giữa ba ẩn x, y, z, thì bằng cách xét hệ bốn phương trình với bốn ẩn số x, y, z, t ta có thể xác định được vị trí tương đối của Δ và (α) tuỳ theo hệ phương trình đó vô nghiệm, có nghiệm duy nhất hoặc có vô số nghiệm.

c) Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng thì nên dùng phương pháp vectơ, tức là xét bộ ba vectơ gồm hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng và vectơ thứ ba có hai điểm đầu và điểm cuối lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó.

3. Để tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, SGK không đưa ra công thức tổng quát mà chỉ nêu ra một số phương pháp khá dễ hiểu, với hi vọng học sinh có thể vận dụng không khó khăn lắm.

III. TRẢ LỜI $\boxed{?}$ VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

HĐ1. Vì $\vec{n} = (A\,;B\,;C)$ và $\vec{u} = (a\,;b\,;c)$ nên $\vec{n}.\vec{u} = Aa + Bb + Cc.$

Ngoài ra đẳng thức

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

xảy ra khi và chỉ khi $M_0 \in (\alpha)$.

Từ đó dựa vào bài toán 4 ta suy ra các khẳng định a), b) và c).

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

22. a) Trục Ox đi qua O và có vectơ chỉ phương $\vec{i}(1\,;0\,;0)$ nên có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

và do đó không có phương trình chính tắc.

Tương tự phương trình tham số của trục Oy và Oz lần lượt là :

$$Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0, \end{cases} \qquad Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

b) Đường thẳng đi qua $M_0(x_0\,;y_0, z_0)$ song song với trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i}$ nên có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

và không có phương trình chính tắc.

Tương tự : Đường thẳng đi qua M_0 song song với Oy có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = z_0. \end{cases}$$

Đường thẳng đi qua M_0 song song với Oz có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t. \end{cases}$$

c) Phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t. \end{cases}$$

Phương trình chính tắc :

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{5},$$

d) Phương trình tham số :

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=2-3t \end{cases}$$

không có phương trình chính tắc.

e) Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x-5y+4=0$ nên $\vec{u}(2\,;-5\,;0)$. Vậy đường thẳng có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-5t \\ z=1 \end{cases}$$

f) Đường thẳng có vectơ chỉ phương

$$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-1;\,-1;\,5)$$

và đi qua $P(2\,;3\,;-1)$ nên có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \\ z=-1+5t \end{cases}$$

hay phương trình chính tắc $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{5}$.

23. a) Đường thẳng cần tìm có các phương trình :

$$\begin{cases} x=4+2t \\ y=3-3t \\ z=1+2t \end{cases} \text{ hoặc } \frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-1}{2}.$$

b) Đường thẳng cần tìm có các phương trình :

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3} \quad \text{hoặc} \begin{cases} x=-2+2t \\ y=3+t \\ z=1+3t \end{cases}$$

c) *Cách 1*. Đường thẳng d đã cho vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{n_1}(1; 1; -1)$ và $\overrightarrow{n_2}(2; -1; 5)$ nên nó có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$. Vậy ta có :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases}$$

Ta có thể lấy $a = 4$ thì $c = -3$ và do đó $b = -7$ và đường thẳng cần tìm có các phương trình là :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \text{ hoặc } \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+1}{-3}.$$

Cách 2. Đường thẳng d gồm những điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ nằm trên (α) và (α') nên toạ độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y + 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Ta cho $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{10}{3} \end{cases}.$

Vậy $M\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{-10}{3}; 0\right) \in d$.

Ta cho $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$

Vậy $N(-1\ ;\ -1\ ;\ -1) \in d$.

Khi đó có thể lấy vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{7}{3}\ ;\ 1\right)$

hay $\overrightarrow{MN} = (4\ ;\ -7\ ;\ -3)$.

Từ đó suy ra phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t. \end{cases}$$

d) Gọi Δ là đường thẳng phải tìm. Vì $\Delta \perp Ox$ nên vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (0\ ;\ b\ ;\ c)$. Vì Δ vuông góc với đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ nên $\vec{u}.\vec{u}_\Delta = 0$, suy ra $-b - c = 0$, lấy $b = 1$ ta có $c = -1$.

Vậy $\vec{u}_{\Delta} = (0 ; 1 ; 1)$. Do đó phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -t. \end{cases}$$

24. a) Cho $y = 4t$, ta được hệ

$$\begin{cases} 2x - 4t + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \\ y = 4t \end{cases}$$

suy ra $x = -2 + t$; $z = -1 + 2t$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng phải tìm là

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 4t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của đường thẳng phải tìm là

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{2}.$$

b) Cho $z = 3t$ ta được hệ

$$\begin{cases} x + y = -3 + 3t \\ 2x - y = 2 - 18t \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - 5t \\ y = -\dfrac{8}{3} + 8t \\ z = 3t \end{cases}$$

25. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1 ; -2 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = (2; 3; 1).$$

Hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oxy) là $M' = (1 ; -2 ; 0)$.

Hình chiếu của vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng (Oxy) là $\vec{u'} = (2 ; 3 ; 0)$. Hình chiếu d' của d trên mặt phẳng (Oxy) là đường thẳng đi qua M' có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0. \end{cases}$$

26. a) *Cách 1.*

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(4 ; 3 ; 1)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(3 ; 5 ; -1)$.

Vì $\quad \vec{u}.\vec{n} = 12 + 15 - 1 = 26 \neq 0$

nên $\vec{u}$ và $\vec{n}$ không vuông góc, và do đó d và (α) cắt nhau.

Cách 2. Phương trình của d viết dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Thay giá trị x, y, z trong phương trình của d vào phương trình của (α) ta được

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \text{ hay } t = -3.$$

Vậy d cắt (α) tại điểm $(0 ; 0 ; -2)$.

b) Thay các giá trị x, y, z trong phương trình của d vào phương trình của (α) ta được

$$(13 + 8t) + 2(1 + 2t) - 4(4 + 3t) + 1 = 0 \text{ hay } 0.t = 0,$$

phương trình đó có vô số nghiệm.

Vậy đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (α).

27. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1 ; 7 ; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2 ; 1 ; 4)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(3 ; -1 ; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(6 ; -2 ; 1)$. Từ đó ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = (2 ; -8 ; -5).$$

Nếu ta chứng minh được rằng ba vectơ $\vec{u}; \vec{u'}; \overrightarrow{MM'}$ không đồng phẳng thì hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Vì hai vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ không cùng phương nên ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'} ; \overrightarrow{MM'}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m và n sao cho :

$$m\vec{u} + n\vec{u'} = \overrightarrow{MM'}$$

hay là :

$$\begin{cases} 2m + 6n = 2 \\ m - 2n = -8 \\ 4m + n = -5 \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ ta suy ra :

$$n = \frac{9}{5}, m = -\frac{22}{5}$$

nhưng các giá trị đó không thoả mãn phương trình thứ ba. Vậy hệ phương trình vô nghiệm, hay là ba vectơ $\vec{u}, \vec{u}'$; $\overrightarrow{MM'}$ không đồng phẳng, tức là hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

b) Đường thẳng d' đi qua điểm $M(0 ; -3 ; -3)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u}'(1;-4;-3)$.

Phương trình d viết dưới dạng tham số (bằng cách cho $x = t$)

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases}$$

Vậy d đi qua điểm $O(0 ; 0 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-4;-3)$.

Như vậy d và d' có cùng vectơ chỉ phương, ngoài ra vì điểm O nằm trên d nhưng không nằm trên d' nên ta có $d \parallel d'$.

28. Lấy điểm $M\left(1 + 2t ; t ; 3 - t\right)$ nằm trên d và điểm $M'\left(-2 ; 3 - t' ; t'\right)$ nằm trên d'. Ta tìm giá trị của t và t' sao cho điểm $A(1 ; -1 ; 1)$ nằm trên đường thẳng MM', tức là $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \left(2t ; 1 + t ; 2 - t\right), \quad \overrightarrow{AM'} = \left(-3 ; 4 - t' ; -1 + t'\right).$$

Khi đó điều kiện cùng phương của hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ là :

$$\frac{2t}{-3} = \frac{1+t}{4-t'} = \frac{2-t}{-1+t'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2t}{-3} = \dfrac{1+t}{4-t'} \\ \dfrac{2t}{-3} = \dfrac{2-t}{-1+t'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2tt' + 11t + 3 = 0 \\ 2tt' - 5t + 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{3}{2}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(-3 ; -\frac{1}{2} ; \frac{7}{2}\right)$.

Vì đường thẳng cần tìm đi qua A có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 - \dfrac{1}{2}t \\ z = 1 + \dfrac{7}{2}t. \end{cases}$$

29. a) Hai đường thẳng d_1 và d_2 có các vectơ chỉ phương lần lượt là

$$\overrightarrow{u_1} = (1 ; 2 ; -1) \text{ và } \overrightarrow{u_2} = (-7 ; 2 ; 3),$$

và lần lượt đi qua các điểm $M_1 = (8 ; 5 ; 8)$ và $M_2 = (3 ; 1 ; 1)$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương nên ba vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_2M_1} = (5 ; 4 ; 7)$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m và n sao cho

$$m\overrightarrow{u_1} + n\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{M_2M_1},$$

tức là

$$\begin{cases} m - 7n = 5 \\ 2m + 2n = 4 \\ -m + 3n = 7. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng hệ phương trình trên vô nghiệm, suy ra ba vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_2M_1}$ không đồng phẳng, do đó hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Gọi (α) là mặt phẳng phải tìm. Vì (α) qua gốc toạ độ O nên phương trình của (α) là :

$$Ax + By + Cz = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

và (α) có vectơ chỉ phương là $\vec{n}_\alpha = (A ; B ; C)$.

Gọi $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2.

Do (α) song song với d_1 và d_2 nên ta có

$$\begin{cases} \vec{n}_\alpha.\vec{n}_1 \\ \vec{n}_\alpha.\vec{u}_2 \\ M_1, M_2 \text{ không thuộc} (\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A + 2B - C = 0 \\ -7A + 2B + 3C = 0 \\ 8A + 5B + 8C = 0 \\ 3A + B + C \neq 0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ ta có

$$C = 2A, \quad B = \frac{A}{2}.$$

Chọn $A = 2$ ta có $B = 1$, $C = 4$.

Dễ thấy với $A = 2$, $B = 1$, $C = 4$ các điều kiện còn lại của hệ được thoả mãn.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là :

$$2x + y + 4z = 0.$$

c) Giả sử PQ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2, với $P \in d_1; Q \in d_2$. Khi đó ta có các giá trị t và t' sao cho

$$P = (8 + t ; 5 + 2t ; 8 - t), \quad Q = (3 - 7t' ; 1 + 2t' ; 1 + 3t').$$

Như vậy ta có :

$$\overrightarrow{PQ} = (-5 - 7t' - t ; -4 + 2t' - 2t ; -7 + 3t' + t).$$

Vectơ $\overrightarrow{PQ}$ đồng thời vuông góc với hai vectơ chỉ phương của $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5 - 7t' - t + 2(-4 + 2t' - 2t) - (-7 + 3t' + t) = 0 \\ -7(-5 - 7t' - t) + 2(-4 + 2t' - t) + 3(-7 + 3t' + t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6t' - 6t = 6 \\ 62t' + 6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \ t' = 0, t = -1.$$

Vậy $P = (7 ; 3 ; 9)$, $Q = (3 ; 1 ; 1)$, và do đó đường vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình :

$$\frac{x-3}{7-3} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{9-1} \quad \text{hay} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng độ dài đoạn thẳng PQ

$$PQ = \sqrt{(7-3)^2 + ((3-1)^2 + (9-1)^2} = 2\sqrt{21}.$$

30. a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\ ;3\ ;5)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2\ ;1\ ;1)$. Gọi φ là góc hợp bởi d và (α) thì $0^o \le \varphi \le 90^o$ và

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|4+3+5|}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{57}}.$$

b) Đưa phương trình của d về dạng tham số rồi kết hợp với phương trình của (α) ta được

$$2(2+2t) + (-1+3t) + (1+5t) - 8 = 0.$$

Từ đó suy ra $t = \frac{1}{3}$ và do đó được giao điểm I của d và (α) có toạ độ :

$$I = \left(2 + \frac{2}{3}\ ;\ -1 + \frac{3}{3}\ ; 1 + \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\ ; 0\ ; \frac{8}{3}\right).$$

c) Ta lấy một điểm A nằm trên d khác với I, cụ thể là $A = (2\ ;-1\ ;\ 1)$, và gọi $A' = (a\ ;\ b\ ;\ c)$ là hình chiếu của A trên (α). Toạ độ của A' xác định bởi hai điều kiện : A' nằm trên (α) và vectơ $\overrightarrow{AA'} = (a-2\ ; b+1\ ; c-1)$

cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2\ ;1\ ;1)$ của (α).

Vậy ta có :

$$\begin{cases} 2a + b + c - 8 = 0 \\ \dfrac{a-2}{2} = \dfrac{b+1}{1} = \dfrac{c-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c - 8 = 0 \\ a = 2b + 4 \\ c = b + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(2b+4) + b + b + 2 - 8 = 0 \\ a = 2b + 4 \\ c = b + 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra : $b = -\frac{1}{3},\ a = \frac{10}{3},\ c = \frac{5}{3}$.

Vậy $A' = \left(\frac{10}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{5}{3}\right)$.

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) chính là đường thẳng d' đi qua hai điểm I và A'.

Vì $\overrightarrow{IA'} = \left(\frac{10}{3} - \frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$

nên có thể lấy vectơ chỉ phương của d' là

$$\vec{n} = \overrightarrow{IA'} = (2; -1; -3).$$

Vậy đường thẳng d' có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} + 2t \\ y = -t \\ z = \frac{8}{3} - 3t \end{cases}$$

31. a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ và thay các giá trị x, y, z cho bởi phương trình đó vào phương trình của mặt phẳng (P) ta được : $2(1 + t) + 3 + 2t - 5 = 0$, suy ra $t = 0$.

Vậy giao điểm của Δ và mặt phẳng (P) là $A = (1 ; 2 ; 3)$.

b) Gọi d là đường thẳng đi qua A nằm trong (P) và vuông góc với Δ. Khi đó vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(a ; b ; c)$ của d phải vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 2 ; 2)$ của Δ, đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2 ; 0 ; 1)$ của (P), tức là :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{u'}.\overrightarrow{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a \\ b = \frac{3}{2}a \end{cases}$$

Nếu ta lấy $a = 2$ thì $b = 3$ và $c = -4$ tức là $\overrightarrow{u'} = (2 ; 3 ; -4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình chính tắc :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

32. a) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(2 ; 3 ; 1)$ và vuông góc với đường thẳng đã cho. Vectơ pháp tuyến của (α) chính là vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 2 ; -2)$ của đường thẳng đó nên (α) có phương trình :

$$(x-2) + 2(y-3) - 2(z-1) = 0 \quad \text{hay} \quad x + 2y - 2z - 6 = 0.$$

Giao điểm H của (α) và đường thẳng có toạ độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2} \\ x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{z+1}{-2} \\ x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = -2x - 5 \\ x + 2y - 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x + 2(2x + 5) - 2(-2x - 5) - 6 = 0$.

Suy ra $9x + 14 = 0$ hay :

$$x = -\frac{14}{9},\ y = \frac{17}{9},\ z = -\frac{17}{9}.$$

Khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng là độ dài đoạn thẳng MH :

$$MH = \sqrt{\left(-\frac{14}{9} - 2\right)^2 + \left(\frac{17}{9} - 3\right)^2 + \left(-\frac{17}{9} - 1\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

b) Giải tương tự câu a), ta có đáp số $\dfrac{\sqrt{2870}}{14}$.

33. a) Dễ nhận thấy rằng hai đường thẳng đã cho song song với nhau. Bởi vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng khoảng cách từ điểm $M(1\,;\,-1\,;\,1)$ (nằm trên đường thẳng thứ nhất) tới đường thẳng thứ hai.

Giả sử H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng thứ hai thì H có toạ độ :

$$H = (2 - 3t\,;\, -2 + 3t\,;\, 3)$$

và $\overrightarrow{MH}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1\,;\,1\,;\,0)$ của đường thẳng đó.

Vì $\overrightarrow{MH} = (1 - 3t\ ;\ -1 + 3t\ ;\ 2)$ nên : $-(1 - 3t) + (-1 + 3t) = 0$ hay $t = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{MH} = (0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

Vậy $MH = 2$.

b) Lấy điểm M $\in$ d, M' $\in$ d' thì M($-$t ; 4 + t ; $-$1 $-$ 2t), M'($-$t' ; 2 + 3t' ; $-$4 + 3t').

Suy ra $\overrightarrow{MM'}$ ($-$t' + t ; $-$2 + 3t $-$ t ; $-$3 + 3t' + 2t).

MM' là đường thẳng vuông góc chung của đường thẳng d, d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u'} = 0 \end{cases}.$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} t' - t - 2 + 3t' + 6 - 6t' - 4t = 0 \\ t' - t - 6 + 9t' - 3t - 9 + 9t + 6t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' + 3t = 2 \\ 19t' + 2t = 15 \end{cases}$$

Từ đó ta có $t' = \dfrac{41}{55}, t = \dfrac{23}{55}$ và $\overrightarrow{MM}' = \left(\dfrac{-18}{55}; \dfrac{-10}{55}; \dfrac{-4}{55}\right)$.

Khoảng cách giữa d và d' là

$$MM' = \sqrt{\left(\frac{-18}{55}\right)^2 + \left(\frac{-10}{55}\right)^2 + \left(\frac{-4}{55}\right)^2} = \frac{2\sqrt{110}}{55}.$$