CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu của chương

Chương này nhằm giới thiệu các phép dời hình và đồng dạng trong không gian, từ đó làm cho học sinh có khái niệm về hai hình bằng nhau và hai hình đồng dạng với nhau. Đó là những khái niệm cần phải có. Chẳng hạn, khi định nghĩa khái niệm thể tích của các khối đa diện ta phải dựa vào tiên đề "*Hai hình bằng nhau thì có thể tích bằng nhau*" bởi vậy học sinh phải biết hai hình như thế nào là bằng nhau ?

Trong chương trình cũ, nội dung này không được trình bày chi tiết. Khi đó SGK chỉ giới thiệu phép đối xứng qua mặt phẳng, và nói một cách đại khái rằng "*Hai hình gọi là bằng nhau nếu có thể thực hiện một số phép đối xứng qua mặt phẳng để biến hình này thành hình kia*". Chương trình cũ không định nghĩa một cách tổng quát phép dời hình và phép đồng dạng trong không gian, cũng không đi sâu vào các phép dời hình cụ thể.

Trong chương trình mới tuy có trình bày thêm nhiều nội dung mới so với trước, nhưng vì thời lượng có hạn, nên không đặt ra những yêu cầu quá cao.

Yêu cầu đối với học sinh chỉ hạn chế như sau:

1. Nắm được định nghĩa tổng quát của phép dời hình và phép đồng dạng trong không gian. Từ đó hiểu được khái niệm về hai hình bằng nhau, về hai hình đồng dạng với nhau.

2. Hiểu được định nghĩa các phép cụ thể : phép tịnh tiến, phép đối xứng qua mặt phẳng, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay, phép vị tự, và có hình dung về sự biến đổi mà các phép đó gây ra.

3. Không yêu cầu áp dụng phép dời hình và phép đồng dạng vào việc giải các bài toán hình học.

Phân phối thời gian (dự kiến)

§1. Phép dời hình trong không gian	1,5 tiết
§2. Một số ví dụ về phép dời hình	3 tiết.
§3. Phép đồng dạng trong không gian	1,5 tiết.
Ôn tập chương	2 tiết.
Tổng số	8 tiết

Một số điều cần lưu ý

1. Định nghĩa phép dời hình trong không gian hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng : đó là *phép biến hình bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm bất kì*. Các phép dời hình cụ thể như phép tịnh tiến, phép đối xứng qua mặt phẳng, phép đối xứng trục, đối xứng tâm đều được định nghĩa một cách kiến thiết và khá đơn giản. Các tính chất của chúng cũng khá rõ ràng.

Riêng phép quay quanh một đường thẳng thì SGK đã đưa ra một định nghĩa khác với truyền thống. Nguyên nhân là trong chương trình không đề cập đến khái niệm "hướng" của không gian (trong lúc khái niệm "hướng" của mặt phẳng thì phải có, vì nếu không thì không thể xây dựng được khái niệm góc lượng giác). Khái niệm "hướng" rất cần thiết vì khi nói đến phép quay (quanh một trục) hiển nhiên là phải biết quay theo hướng nào, quay từ trái sang phải hay từ phải sang trái ?

Nhân đây cũng nói thêm : vì ta không có khái niệm "hướng" nên không thể định nghĩa một cách hình học khái niệm "tích vectơ của hai vectơ" (chương IV, Ban Khoa học tự nhiên) mà chỉ có thể nêu định nghĩa bằng cách dùng toạ độ.

Để các giáo viên nhớ lại, chúng tôi xin trình bày sơ lược khái niệm " định hướng" trong không gian và một số khái niệm có liên quan.

1) Không gian định hướng

Trong không gian một bộ ba có thứ tự gồm ba vectơ không đồng phẳng $(\overrightarrow{a_1}\,;\overrightarrow{a_2}\,;\overrightarrow{a_3})$ được gọi là một *cơ sở của không gian*.

Xét hai cơ sở nào đó của không gian : $(\overrightarrow{a_1}\ ;\ \overrightarrow{a_2}\ ;\ \overrightarrow{a_3})$ và $(\overrightarrow{b_1}\ ;\ \overrightarrow{b_2}\ ;\ \overrightarrow{b_3})$. Khi đó ta có các số α_{ij} $(i, j = \overline{1,3})$ sao cho :

$$\vec{b}_1 = \alpha_{11}\overrightarrow{a_1} + \alpha_{12}\overrightarrow{a_2} + \alpha_{13}\overrightarrow{a_3}$$
$$\vec{b}_2 = \alpha_{21}\overrightarrow{a_1} + \alpha_{22}\overrightarrow{a_2} + \alpha_{23}\overrightarrow{a_3}$$
$$\vec{b}_3 = \alpha_{31}\overrightarrow{a_1} + \alpha_{32}\overrightarrow{a_2} + \alpha_{33}\overrightarrow{a_3}.$$

Ma trận

$$\left(\alpha_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

được gọi là *ma trận chuyển* từ cơ sở $(\overrightarrow{a_1}\ ;\ \overrightarrow{a_2}\ ;\ \overrightarrow{a_3})$ sang cơ sở $(\overrightarrow{b_1}\ ;\ \overrightarrow{b_2}\ ;\ \overrightarrow{b_3})$.

Vì các vectơ $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ độc lập tuyến tính nên ma trận chuyển có định thức khác không :

$$\det(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

Nếu $\det(\alpha_{ij}) > 0$ ta nói rằng cơ sở $(\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{a_3})$ *cùng hướng với* cơ sở $(\overrightarrow{b_1}; \overrightarrow{b_2}; \overrightarrow{b_3})$.

Nếu $\det(\alpha_{ij}) < 0$ ta nói rằng cơ sở $(\overrightarrow{a_1}\ ;\ \overrightarrow{a_2}\ ;\ \overrightarrow{a_3})$ *khác hướng với* cơ sở $(\overrightarrow{b_1}\ ;\ \overrightarrow{b_2}\ ;\ \overrightarrow{b_3})$.

Từ định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra :

i) Mỗi cơ sở đều cùng hướng với chính nó.

ii) Nếu cơ sở (I) cùng hướng với cơ sở (II) thì cơ sở (II) cùng hướng với cơ sở (I) (bởi vậy ta nói rằng hai cơ sở đó *cùng hướng với nhau*).

iii) Hai cơ sở cùng hướng với cơ sở thứ ba thì cùng hướng với nhau.

Như vậy quan hệ *cùng hướng* giữa các cơ sở của không gian là một quan hệ tương đương. Quan hệ đó chia các cơ sở của không gian làm hai lớp tương đương :

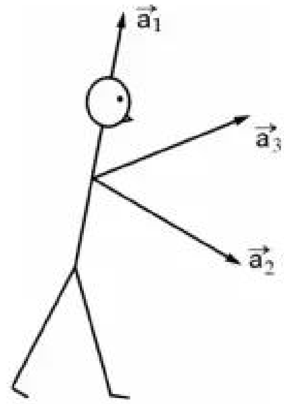
Hai cơ sở cùng thuộc một lớp khi và chỉ khi chúng cùng hướng, và do đó hai cơ sở không cùng thuộc một lớp khi và chỉ khi chúng khác hướng.

***Định nghĩa* :** Không gian gọi là *được định hướng* nếu trong đó đã chọn một cơ sở nào đó và gọi nó là *cơ sở có hướng thuận* (hay là *cơ sở thuận*). Khi đó, mọi cơ sở cùng hướng với cơ sở đã chọn gọi là *cơ sở thuận*, khác hướng với cơ sở đã chọn gọi là *cơ sở nghịch*.

Trong vật lí, người ta chọn cơ sở thuận trong không gian như sau :

Một người đứng thẳng và giơ hai cánh tay về phía trước (h. 1).

Gọi $\overrightarrow{a_1}$ là vectơ thẳng đứng đi từ cổ lên đầu, $\overrightarrow{a_2}$ là vectơ đi dọc theo cánh tay phải, $\overrightarrow{a_3}$ là vectơ đi dọc theo cánh tay trái (đều hướng từ vai ra bàn tay của mỗi cánh tay).



Hình 1

Khi đó bộ ba $(\overrightarrow{a_1}\,;\overrightarrow{a_2}\,;\overrightarrow{a_3})$ được xem là một cơ sở thuận.

2) Nhị diện định hướng

Nhị diện là hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng α và β có bờ chung là đường thẳng $\varDelta$, kí hiệu là $\{\alpha,\beta\}$. Nếu lấy một mặt phẳng (P) vuông góc với $\varDelta$ tại điểm O nào đó thì (P) sẽ cắt α theo tia Ox và cắt β theo tia Oy, tức là cắt nhị diện $\{\alpha,\beta\}$ theo một góc xOy. Ta gọi góc xOy là *góc phẳng* của nhị diện $\{\alpha,\beta\}$, số đo của góc xOy không phụ thuộc vào mặt phẳng (P) và được gọi là *số đo của nhị diện* $\{\alpha,\beta\}$.

Hiển nhiên, theo định nghĩa đó thì số đo của nhị diện $\{\alpha,\beta\}$ bằng số đo của nhị diện $\{\beta,\alpha\}$.

Bây giờ trong không gian định hướng xét *cặp có thứ tự* gồm hai nửa mặt phẳng α và β có bờ chung là đường thẳng $\varDelta$, ta sẽ chọn một vectơ $\vec{i}$ khác $\vec{0}$

trên Δ để làm cho Δ trở thành một trục. Khi đó cặp có thứ tự $[\alpha, \beta]$ với trục Δ gọi là *nhị diện định hướng*, và được kí hiệu là $[\alpha, \beta]$.

Ta cắt nhị diện định hướng $[\alpha ; \beta]$ bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Δ thì được góc xOy. Lấy vectơ $\overrightarrow{j}$ và $\vec{k}$ lần lượt định hướng cho hai tia *Ox và Oy*. Khi đó :

Nhị diện $[\alpha ; \beta]$ gọi là *có hướng thuận* hay *có hướng nghịch* tuỳ theo cơ sở $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là cơ sở thuận hay cơ sở nghịch.

Bây giờ xét nhị diện định hướng $[\alpha ; \beta]$ với số đo của nhị diện $\{\alpha, \beta\}$ bằng φ.

Khi đó ta định nghĩa :

Số đo của nhị diện định hướng $[\alpha ; \beta]$ *bằng* $\varphi + 2k\pi$ *nếu nhị diện ấy có hướng thuận và bằng* $-\varphi + 2k\pi$ *nếu nhị diện ấy có hướng nghịch.*

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng :

+) Hai nhị diện $[\alpha ; \beta]$ và $[\beta ; \alpha]$ có số đo đối nhau.

+) Nếu trục của nhị diện $[\alpha ; \beta]$ đổi hướng thì ta được nhị diện có số đo đổi dấu.

3) Định nghĩa phép quay (trong không gian) quanh một trục

Trong không gian đã định hướng cho một trục Δ và một số thực φ. Xét phép biến đổi Q biến mỗi điểm M trên Δ thành chính nó và biến mỗi điểm M không nằm trên Δ thành điểm M' thoả mãn các điều kiện sau đây :

i) M và M' nằm trên mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ.

ii) M và M' cách đều đường thẳng Δ.

iii) Nếu gọi α và β là các mặt phẳng có bờ là Δ, lần lượt đi qua M và M' thì góc nhị diện định hướng $[\alpha ; \beta]$ với trục Δ có số đo là $\varphi + 2k\pi$, với $k \in \mathbf{Z}$

Phép biến hình Q gọi là phép quay quanh trục Δ với góc quay là φ.

Ta dễ chứng minh được rằng phép quay như vậy là phép dời hình.

4) Định nghĩa tích có hướng của hai vectơ

Trong không gian đã định hướng cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u}$ và $\vec{v}$. *Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là vectơ $\vec{w}$* được xác định như sau :

i) Vectơ $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

ii) Cơ sở $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ là cơ sở thuận.

iii) Độ dài của vectơ $\vec{w}$ bằng $|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Tích vectơ của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ được kí hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$ hoặc $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2. Về mặt lí thuyết ta không thể trình bày cho học sinh tất cả các chứng minh chi tiết và chặt chẽ, vì không đủ thời gian và vì ta không yêu cầu cao như vậy.

Từ định nghĩa phép dời hình là "*phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm*" ta dễ dàng chứng minh các các tính chất sau đây của phép dời hình :

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó, biến bốn điểm đồng phẳng thành bốn điểm đồng phẳng (có trình bày trong SGK).

Tuy nhiên, việc từ đó suy ra các hệ quả : *phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, mặt phẳng thành mặt phẳng ....* thì lại không đơn giản. Nhưng các hệ quả đó lại rất dễ hiểu và khá trực quan. Bởi vậy SGK đã không chứng minh một cách chi tiết và cũng không nói rằng *người ta có thể chứng minh được ...*

Chính vì thế mà các bài tập trong chương này cũng không đòi hỏi học sinh phải lập luận một cách chính xác. Chẳng hạn khi đặt câu hỏi :

Tại sao phép dời hình biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song ? ta chỉ cần học sinh trả lời như sau :

Nếu a // b thì a và b nằm trên mặt phẳng (P) và không có điểm chung, bởi vậy ảnh a' và b' là hai đường thẳng nằm trên (P') (ảnh của (P)) và cũng không điểm chung, do đó $a' // b'$.