Một số đề kiểm tra
(để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V ; M là trung điểm của cạnh bên AA'. Cắt khối lăng trụ bằng hai mặt phẳng (MBC) và $(MB'C')$ ta được ba khối chóp đỉnh M.

1. Kể tên ba khối chóp đó.

2. Chứng minh rằng chiều cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ gấp đôi chiều cao của khối chóp $M.ABC$, từ đó hãy tính thể tích khối chóp $M.ABC$ theo V.

Đáp án và thang điểm

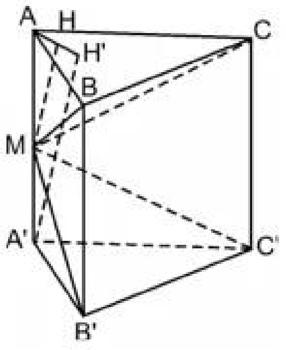
1. (*5 điểm*). Hình 36. Ba khối chóp đó là :

$$M.ABC,\ M.A'B'C',\ M.BCC'B'.$$

2. (*5 điểm*). Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của điểm M và điểm A' trên mặt phẳng (ABC). Do M là trung điểm của AA' nên H là trung điểm của AH'. Từ đó dễ thấy

$$A'H' = 2MH$$

tức chiều cao của khối lăng trụ gấp đôi chiều cao của khối chóp $M.ABC$.



Hình 36

Ta có :

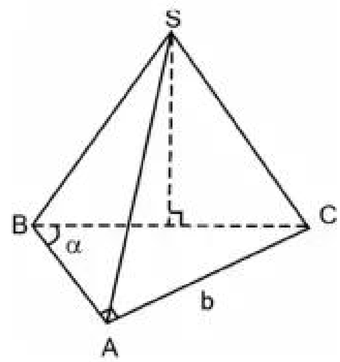
$$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.MH = \frac{1}{3}.S_{ABC}.\frac{1}{2}A'H' = \frac{1}{6}S_{ABC}.A'H' = \frac{1}{6}V.$$

Đề 2. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác vuông ABC tại A, $AC = b$, $\widehat{ABC} = \alpha$, mặt bên SBC là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

1. Chứng minh rằng hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC.

2. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo b và α.

Đáp án và thang điểm



Hình 37

1. *(4 điểm)*. Hình 37. Kẻ SH vuông góc với BC ($H \in BC$) thì $SH \perp (ABC)$ (vì $(SBC) \perp (ABC)$, $(SBC) \cap (ABC) = BC$).

Do đó H là hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC).

Vì tam giác (SBC) là tam giác đều nên H là trung điểm của BC.

2. *(6 điểm)*. Xét tam giác vuông ABC, ta có

$$AB = b\cot\text{g}\,\alpha$$

$$BC = \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Từ đó ta có :

$$SH = BC\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2\sin\alpha},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}b^2\,\text{cotg}\,\alpha.$$

Vậy : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{\sqrt{3}}{12}b^3.\frac{\text{cotg}\,\alpha}{\sin\alpha}.$

Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

1. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ là tứ diện đều.

2. Chứng minh rằng bốn khối tứ diện sau đây có thể tích bằng nhau :

$$D'DAC,\ B'ABC,\ AA'B'D',\ CC'B'D'$$

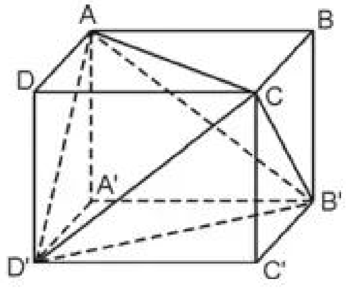
và tính thể tích của mỗi khối đó.

3. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Đáp án và thang điểm

1. (*3 điểm*). Hình 38. Tứ diện $ACB'D'$ có các cạnh đều là đường chéo của các mặt của khối lập phương nên chúng bằng nhau (đều bằng $a\sqrt{2}$).

Vậy $ACB'D'$ là tứ diện đều.



Hình 38

2. (*3 điểm*). Bốn khối tứ diện nêu trong bài toán là bốn khối chóp tam giác.

$$D'.DAC,\ B'.BAC,\ A.A'B'D',\ C.C'B'D'.$$

Bốn khối này có các mặt đáy bằng nhau ($\Delta DAC = \Delta BAC = \Delta A'B'D' = \Delta C'B'D'$) và có chiều cao bằng nhau (đều bằng a) nên chúng có thể tích bằng nhau.

Ta có :

$$V_{D'.DAC} = \frac{1}{3}S_{DAC}.DD' = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{a^3}{6}.$$

Vậy thể tích mỗi khối chóp nói trên bằng $\frac{a^3}{6}$.

3. (*4 điểm*). *Cách 1*. Dễ thấy khối lập phương đã cho được phân chia thành năm khối tứ diện :

$$ACB'D',\ D'DAC,\ B'ABC,\ AA'B'D',\ CC'B'D'.$$

Vậy :

$$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{D'DAC} = a^3 - \frac{4a^3}{6} = \frac{1}{3}a^3.$$

Cách 2. Chiều cao h của tứ diện là

$$h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Diện tích S một mặt bằng

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy :

$$V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}a^3.$$

Đề 2. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác vuông tại B và $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ $(c^2 \geq a^2 + b^2)$.

Một mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các cạnh CC' và BB' tại M và N.

1. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối tứ diện $CA'AB$.

2. Chứng minh rằng $AN \perp A'B$.

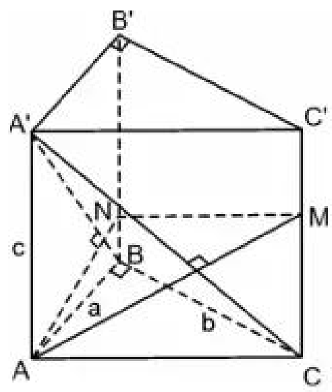
3. Tính thể tích khối tứ diện $A'AMN$.

Đáp án và thang điểm

1. (*4 điểm*). Hình 39.

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}abc.$$

$$V_{CA'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AA' = \frac{1}{6}abc.$$



Hình 39

2. (*3 điểm*). Ta có $CB \perp AB$, $CB \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$) suy ra $CB \perp (AA'B)$.

Từ đó ta có $AN \perp CB$. Mặt khác $AN \perp CA'$ (do $CA' \perp (AMN)$), suy ra $AN \perp A'B'$.

3. (*3 điểm*). Ta có :

$$V_{A'AMN} = V_{M.AA'N} = V_{M.AA'B} \text{ (vì } NB \,//\, AA'\text{)}$$

$$= V_{C.AA'B} \text{ (do } MC \,//\, AA'\text{)}$$

$$= \frac{1}{6}abc.$$