Một số đề kiểm tra
(để giáo viên tham khảo)

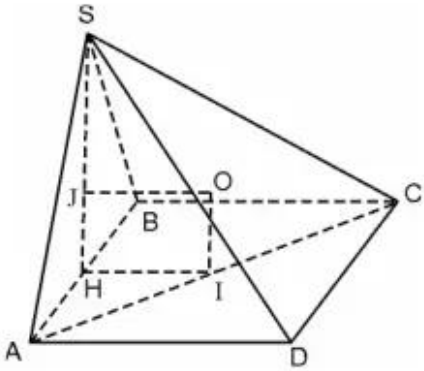
Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Đáp án và thang điểm

Tìm tâm (5 điểm)

Kẻ SH là đường cao của hình chóp thì H là trung điểm AB (h. 63). Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$, J là trọng tâm của tam giác đều SAB, và O là điểm sao cho $IOJH$ là hình chữ nhật. Khi đó $OS = OA = OB$ (vì OJ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB) và $OA = OB = OC = OD$ (vì OI là trục của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$).



Hình 63

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

Tính bán kính R (5 điểm)

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $R = OA$.

Ta có :

$$OA^2 = AI^2 + OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}.$$

Vậy $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Đề 2. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O'\ ;\ R)$, $OO' = R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O\ ;\ R)$.

1. Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

2. Mặt xung quanh của hình nón chia khối lăng trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Đáp án và thang điểm

1. (6 điểm) (h.64). Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_1 = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2.$$

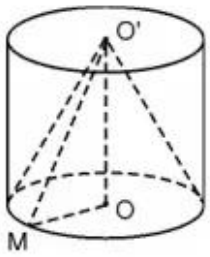
Lấy một đường sinh $O'M$ của hình nón thì

$$O'M = \sqrt{O'O^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_2 = \pi R.2R = 2\pi R^2.$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.



Hình 64

2. (4 điểm) Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích khối trụ bằng ba lần thể tích khối nón.

Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần : khối nón, và phần còn lại có thể tích bằng hai lần thể tích khối nón.

Vậy tỉ số thể tích hai phần đó là $\dfrac{1}{2}$.

Các đề kiểm tra 45 phút.

Đề 1. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn $(\mathscr{C})$ đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm bất kì thuộc $(\mathscr{C})$, C khác A và B. Xét đường thẳng Δ đi qua điểm A và vuông góc với (P), trên đó lấy điểm S bất kì, $S \neq A$. Gọi B_1, C_1 là hình chiếu của A trên SB, SC.

1. Chứng minh các điểm A, B_1, C_1, B, C cùng thuộc một mặt cầu. Tìm tâm, tính diện tích mặt cầu đó.

2. Gọi I là giao điểm của BC và B_1C_1. Chứng minh rằng AI luôn tiếp xúc với mặt cầu nói trên.

1. *(6 điểm)* (h.65)

Ta có $AB_1 \perp B_1B$, tức là $\widehat{AB_1B} = 90^o$.

Mặt khác

$$(SAC) \perp (SCB),$$

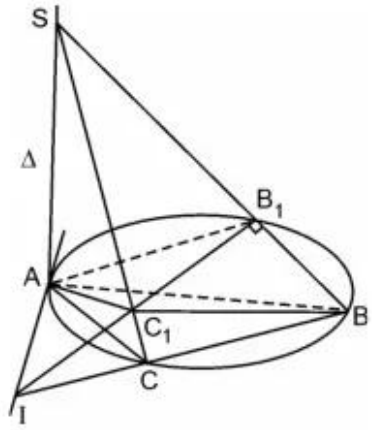
mà

$$AC_1 \perp SC$$

nên $\quad AC_1 \perp (SCB)$,

từ đó $AC_1 \perp C_1B$ hay $\widehat{AC_1B} = 90^o$.

Vậy AB là đường kính của mặt cầu đi qua A, B, C, B_1, C_1.



Hình 65

Diện tích mặt cầu đó là

$$\pi AB^2 = 4\pi R^2.$$

2. *(4 điểm)*. Dễ thấy đường thẳng AI nằm trong mặt phẳng (P) và mặt phẳng (AB_1C_1). Theo chứng minh trên thì

$$AC_1 \perp (SBC),$$

từ đó $\quad AC_1 \perp SB$.

Kết hợp với giả thiết

$$AB_1 \perp SB$$

ta có $SB \perp \text{mp}(AB_1C_1)$, từ đó $AI \perp SB$. Mặt khác $SA \perp \text{mp}(P)$ nên $AI \perp AB$.

Do vậy AI là tiếp tuyến của mặt cầu phải tìm.

Đề 2. Cắt hình nón N đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của N.

2. Cho một dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với đáy hình nón góc 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

3. Tính diện tích và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón.

1. *(4 điểm)* Giả sử cắt hình nón N bởi mặt phẳng đi qua trục SO của nó ta được tam giác vuông cân SAB (h. 66).

Từ giả thiết suy ra N có bán kính đáy là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

chiều cao $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

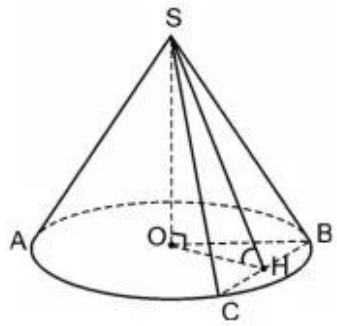
và đường sinh $l = a$.

Vậy

$$S_{xq} = \pi Rl = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2};$$

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi a^2}{2};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$



Hình 66

2. *(3 điểm)* Kẻ $OH \perp BC$ thì $SH \perp BC$ và $\widehat{SHO} = 60^o$. Bởi vậy :

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^o} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra diện tích tam giác SBC là

$$S = SH.HB = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

3. *(3 điểm)* Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo một đường tròn lớn nội tiếp tam giác SAB, vậy bán kính r của mặt cầu đó bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB. Suy ra :

$$r = \frac{2S_{SAB}}{AB + 2SA} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} + 2a} = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Vậy mặt cầu nội tiếp hình nón có diện tích là :

$$S = 4\pi r^2 = \frac{4\pi a^2(2-\sqrt{2})^2}{4} = \pi a^2(2-\sqrt{2})^2.$$

Thể tích của hình cầu nội tiếp hình nón là

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)^3 a^3}{6}.$$