Ôn tập chương III

I. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Vì chỉ có 2 tiết ôn tập chương nên cần yêu cầu học sinh chuẩn bị ôn tập chu đáo ở nhà theo hướng dẫn trong SGK.

2. Nên lựa chọn 4 hoặc 5 bài tập ôn để chữa trên lớp, thông qua đó mà củng cố kiến thức và rèn kĩ năng cho học sinh.

3. Cho làm bài kiểm tra 45 phút.

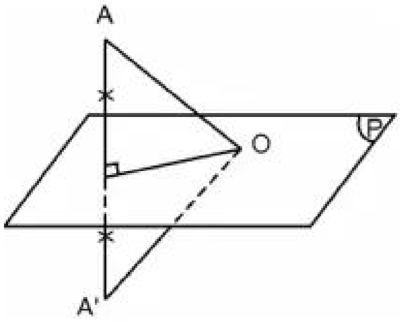
II. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. (h.58) Giả sử S là mặt cầu đi qua **A** và có tâm $O \in (P)$ (h. 58). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) thì

$$OA' = OA$$

nên mặt cầu S cũng đi qua A'.

Vậy các mặt cầu S đi qua hai điểm cố định A và A'.



Hình 58

2. (h.59) Giả thiết đã cho ta suy ra :

$AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $AC = a\sqrt{3}$.

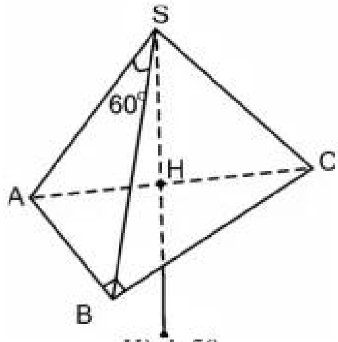
Như vậy tam giác ABC vuông ở B.

Gọi SH là đường cao của hình chóp thì

do $SA = SB = SC$,

nên $HA = HB = HC$

và do đó H chính là trung điểm của cạnh AC.



Hình 59

Gọi O là điểm đối xứng với S qua điểm H thì dễ dàng thấy

$$OS = OA = OC = OB = a.$$

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm O và có bán kính $R = a$.

3. (h. 60) Gọi M là trung điểm của AB thì

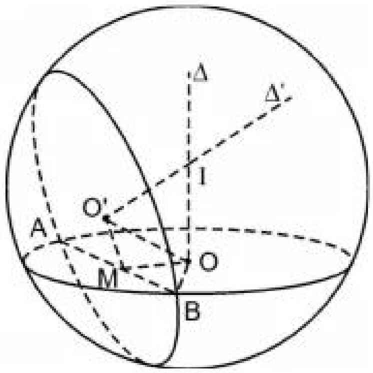
$OM \perp AB$ và $O'M \perp AB$.

Do các mặt phẳng (P) và (P') phân biệt nên O, M, O' không thẳng hàng và từ đó ta có

$AB \perp \text{mp}(OMO')$. (1)

Gọi Δ và Δ' lần lượt là trục của đường tròn $C(O\,;\,r)$ và $C'(O'\,;\,r)$ thì

$\Delta \perp AB$ và $\Delta' \perp AB$



Hình 60

đồng thời O thuộc Δ, O' thuộc Δ'. (2)

Vậy từ (1) và (2) suy ra Δ và Δ' cũng nằm trong một mặt phẳng (OMO').

Mặt khác (P) và (P') phân biệt nên Δ và Δ' cắt nhau tại điểm I.

Khi ấy mặt cầu (S) tâm I, bán kính $R = IA$ là mặt cầu phải tìm.

b) Vì $AB = OA = OB = r$ nên $OM = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$,

Tương tự ta cũng có $O'M = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác OMO' ta có

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M\cos\widehat{OMO'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9r^2}{4} = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2.\frac{r\sqrt{3}}{2}.\frac{r\sqrt{3}}{2}\cos\widehat{OMO'}$$

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{OMO'} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{OMO'} = 120^{\circ}, \text{ từ đó } \widehat{OIO'} = 60^{\circ}.$$

Dễ thấy rằng $OI = O'I$ (cũng bằng $\sqrt{R^2 - r^2}$).

Như vậy OIO' là tam giác đều, do đó $OI' = \dfrac{3r}{2}$.

Xét tam giác vuông BOI ta có :

$$IB^2 = OB^2 + OI^2 = r^2 + \left(\frac{3r}{2}\right)^2 = \frac{13r^2}{4}.$$

Vậy diện tích mặt cầu (S) bằng $13\pi r^2$.

4. Theo giả thiết, mặt nón **N** có bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$, có chiều cao $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, và có đường sinh $l = a$.

Vậy hình nón **N** có diện tích toàn phần S và thể tích V là :

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

Nếu mặt cầu bán kính R có diện tích bằng diện tích toàn phần S của hình nón thì :

$$4\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

Suy ra $\qquad R = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$

b) Nếu mặt cầu bán kính R có thể tích bằng thể tích V của hình nón thì :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

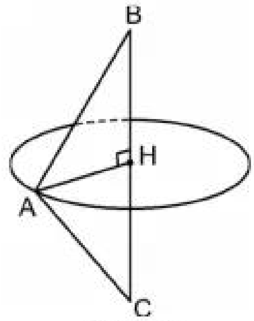
Suy ra $\qquad R = \dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}a.$

5. a) Khi quay tam giác ABC quanh AB ta được khối nón có đường cao c và bán kính đáy là b, nên nó có thể tích :

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi b^2 c.$$

Khi quay tam giác ABC quanh AC ta được khối nón có đường cao b và bán kính đáy là c, nên có thể tích :

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi c^2 b.$$



Hình 61

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Khi quay tam giác ABC quanh BC (h. 61) ta được khối tròn xoay hợp thành của hai khối nón sinh ra bởi tam giác ABH và ACH khi quay quanh BC. Bởi vậy ta có :

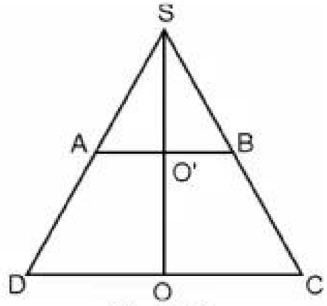
$$V_3 = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi.AH^2.CH = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC.$$

Vì $\qquad AH = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ và $BC = \sqrt{b^2+c^2}$ nên $V_3 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\pi b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$

b) Ta có

$$\frac{1}{V_3^2} = \frac{9(b^2+c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{9b^2}{\pi^2 b^4 c^4} + \frac{9c^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \left(\frac{3}{\pi c^2 b}\right)^2 + \left(\frac{3}{\pi b^2 c}\right)^2 = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

6. Gọi S là giao điểm hai cạnh bên AD và BC của hình thang (h. 62). Đường cao SO của tam giác cân SCD là trục đối xứng của hình thang do đó SO cắt AB tại trung điểm O' của AB.



Hình 62

Khi quay quanh SO, tam giác SCD sinh ra khối nón $\boldsymbol{N}_1$ có thể tích V_1, tam giác SAB sinh ra khối nón $\boldsymbol{N}_2$ có thể tích V_2, còn hình thang $ABCD$ sinh ra một khối tròn xoay $\boldsymbol{H}$ có thể tích $V = V_1 - V_2$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.OC^2.SO - \frac{1}{3}\pi.OB^2.SO' = \frac{1}{3}\pi.4a^2.SO - \frac{1}{3}\pi a^2.SO'$

$= \frac{1}{3}\pi a^2(4SO - SO').$

Chú ý rằng AB là đường trung bình của tam giác SCD nên $SB = 3a$ và do đó $SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$ và $SO = 2SO' = 4\sqrt{2}a$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi a^2\left(16\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}a\right) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

Gọi S_{N_1} và S_{N_2} lần lượt là diện tích xung quanh của khối nón $\boldsymbol{N}_1$ và $\boldsymbol{N}_2$ thì diện tích xung quanh của khối tròn xoay $\boldsymbol{H}$ là

$$S_{xq} = S_{N_1} - S_{N_2} = \pi.OC.SC - \pi.O'B.SB = 9\pi a^2.$$

Cộng thêm diện tích của hai hình tròn đáy của $\boldsymbol{H}$ ta được diện tích toàn phần của $\boldsymbol{H}$ là

$$S_{tp} = 9\pi a^2 + \pi a^2 + 4\pi a^2 = 14\pi a^2.$$