Ôn tập chương IV

I. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Cần hướng dẫn học sinh chuẩn bị ôn tập ở nhà. Cụ thể : hệ thống lại các kiến thức cần nhớ ở cuối chương, tự mình trả lời các câu hỏi tự kiểm tra, và làm các bài tập ôn tập.

2. Tuỳ theo tình hình cụ thể của mỗi lớp, thầy giáo chọn một số bài tập để chữa tại lớp, các bài khác cho học sinh nêu phương pháp giải.

3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút.

II. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP.

1. a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3\,;-6\,;4)\,;\ \overrightarrow{AC} = (4\,;-6\,;2)\,;\ \overrightarrow{AD} = (4\,;-5\,;1)$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương, nên ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m và n sao cho

$$m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD},$$

hay :

$$\begin{cases} 3m + 4n = 4 \\ -6m - 6n = -5 \\ 4m + 2n = 1 \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu ta suy ra $n = \dfrac{3}{2}$ và $m = \dfrac{-2}{3}$, nhưng các giá trị đó không thoả mãn phương trình thứ ba.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm, tức là ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng. Suy ra bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng.

b) Mặt phẳng có phương trình $ax + by + cz + d = 0$ đi qua B, C, D khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 4a + 6c + d = 0 \\ 5a + 4c + d = 0 \\ 5a + b + 3c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6c + d = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$$

Cho $c = 1$ ta được $a = 2, b = 1, d = -14$.

Vậy mặt phẳng (BCD) có phương trình :

$$2x + y + z - 14 = 0.$$

c) Bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ tâm A tới mặt phẳng (BCD) nên :

$$R = \frac{|2.1 + 6 + 2 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Vậy mặt cầu có phương trình :

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = \frac{8}{3}.$$

Gọi H là tiếp điểm thì AH là đường thẳng đi qua A, vuông góc với mặt phẳng (BCD) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2\,;1\,;1)$.

Vậy AH có phương trình $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Từ đó kết hợp với phương trình mặt (BCD) ta tìm được $t = \frac{2}{3}$.

Vậy $H = \left(\frac{7}{3} ; \frac{20}{3} ; \frac{8}{3}\right)$.

2. a) Điểm $A'(a ; b ; c)$ là điểm đối xứng với điểm $A(1 ; -1 ; -2)$ qua mặt phẳng khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{AA'}(a-1 ; b+1 ; c+2)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1 ; -2 ; 3)$ của mặt phẳng (P) và trung điểm $I\left(\frac{a+1}{2} ; \frac{b-1}{2} ; \frac{c-2}{2}\right)$ của đoạn thẳng AA' nằm trên mặt phẳng (P). Vậy :

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{1} = \dfrac{b+1}{-2} = \dfrac{c+2}{3} \\ \dfrac{a+1}{2} - 2\left(\dfrac{b-1}{2}\right) + 3\left(\dfrac{c-2}{2}\right) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 1 \\ c = 3a - 5 \\ a - 2b + 3c - 13 = 0. \end{cases}$$

Thay các giá trị của b, c từ hai phương trình đầu vào phương trình thứ ba ta được :

$$a - 2(-2a + 1) + 3(3a - 5) - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 14a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{15}{7}, b = \frac{-23}{7}, c = \frac{10}{7}.$$

Vậy toạ độ điểm A' là $A' = \left(\frac{15}{7} ; -\frac{23}{7} ; \frac{10}{7}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2 ; 3)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1 ; -2 ; 3)$. Vậy nếu φ là góc hợp bởi đường thẳng AB và mặt phẳng (P) thì :

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB}.\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}|.|\vec{n}|} = \frac{|2 - 4 + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{17}.\sqrt{14}}$$

với $0^{\circ} \leq \varphi \leq 90^{\circ}$.

c) Nếu gọi $\vec{n}(a ; b ; c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) thì từ điều kiện của (Q) ta suy ra $\vec{n}$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AB} = (2 ; 2 ; 3)$, và vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}'(1 ; -2 ; 3)$ của mặt phẳng (P). Vậy :

$$\begin{cases} 2a + 2b + 3c = 0 \\ a - 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6c = 0 \\ a - 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = \dfrac{c}{2}. \end{cases}$$

Nếu ta lấy $c = 2$ thì $a = -4$ và $b = 1$.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $A(1 ; -1 ; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(-4 ; 1 ; 2)$ nên có phương trình

$$-4(x - 1) + (y + 1) + 2(z + 2) = 0 \text{ hay } -4x + y + 2z + 9 = 0.$$

d) Đường thẳng AB đi qua A có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ nên có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Để tìm toạ độ giao điểm I, ta thay các giá trị x, y, z cho bởi phương trình trên vào phương trình của mặt phẳng (P) ta có :

$$(1 + 2t) - 2(-1 + 2t) + 3(-2 + 3t) - 5 = 0$$

Vậy $t = \dfrac{8}{7}$.

Suy ra $I = \left(\dfrac{23}{7} ; \dfrac{9}{7} ; \dfrac{10}{7}\right)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; b ; c)$ vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-2;3)$ của (P) và vuông góc với $\overrightarrow{AB}(2 ; 2 ; 3)$ nên

$$\begin{cases} a - 2b + 3c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 6c = 0 \\ a + 4b = 0 \end{cases}$$

Ta lấy $a = 4$ thì $b = -1$ và $c = -2$, vậy ta được $\vec{u} = (4 ; -1 ; -2)$. Đường thẳng Δ lại đi qua điểm I nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} + 4t \\ y = \dfrac{9}{7} - t \\ z = \dfrac{10}{7} - 2t \end{cases}$$

3. a) • Đường thẳng d_1 gồm những điểm có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Cho $x = t$ ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$$

đó là phương trình tham số của d_1.

• Các mặt phẳng (α_3) và (α_4) lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_3}(1 ; 3 ; 0)$ và $\overrightarrow{n_4}(0;1;1)$. Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(a;b;c)$ của đường thẳng d_2 phải vuông góc với hai vectơ đó nên có thể lấy $\overrightarrow{u_2} = (3 ; -1 ; 1)$.

Ngoài ra điểm $I(1 ; 0 ; 2)$ nằm trên (α_3) và (α_4) nên cũng nằm trên d_2.

Vậy đường thẳng d_2 có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

b) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(0 ; 0 ; -4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1 ; -1 ; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (2 ; 3 ; 5)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A và d_1 nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (a ; b ; c)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{MA}$ nên :

$$\begin{cases} a - b - 2c = 0 \\ 2a + 3b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 2c = 0 \\ 5b + 9c = 0 \end{cases}$$

Nếu ta lấy $c = -5$ thì $b = 9$ và $a = -1$.

Vậy $\overrightarrow{n_P} = (-1; 9; -5)$ và do đó (P) có phương trình :

$$11x + y - 5(z + 4) = 0 \quad \text{hay} \quad x - 9y + 5z + 20 = 0.$$

c) Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1 ; 0 ; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(3 ; -1 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{NA} = (1 ; 3 ; -1)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua N và d_2 nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = (a ; b ; c)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{NA}$ nên :

$$\begin{cases} 3a - b + c = 0 \\ a + 3b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 10a + 2c = 0 \end{cases}.$$

Ta lấy $a = 1$ thì $b = -2$ và $c = -5$. Vậy $\overrightarrow{n_Q} = (1; -2; -5)$, và do đó (Q) có phương trình :

$$x - 1 - 2y - 5(z - 2) = 0 \quad \text{hay} \quad x - 2y - 5z + 9 = 0.$$

d) Nếu d là đường thẳng đi qua A và cắt cả d_1 và d_2 thì d nằm trên cả hai mặt phẳng (P) và (Q), tức là d gồm những điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

Đặt $x = t$ ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{29}{11} + \dfrac{2}{11}t \\ z = \dfrac{41}{55} + \dfrac{7}{55}t. \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng d. Hai đường thẳng d và d_1 nằm trong mặt phẳng (P) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên cắt nhau. Hai đường thẳng d và d_2 nằm trong mặt phẳng (Q) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên cắt nhau.

e) Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d_2 thì

$$H = (1 + 3t ; -t ; 2 + t) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{AH} = (-1 + 3t ; -3 - t ; 1 + t).$$

Vì $\overrightarrow{AH}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(3;-1;1)$ nên :

$$3(-1 + 3t) - (-3 - t) + (1 + t) = 0 \Rightarrow 11t + 1 = 0 \quad \text{hay} \quad t = -\frac{1}{11}.$$

Vậy $H = \left(\frac{8}{11};\frac{1}{11};\frac{21}{11}\right)$; $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{14}{11};-\frac{32}{11};\frac{10}{11}\right)$.

Khoảng cách từ A đến đường thẳng d_2 bằng độ dài đoạn thẳng AH, do đó

$$AH = \sqrt{\left(\frac{14}{11}\right)^2 + \left(\frac{32}{11}\right)^2 + \left(\frac{10}{11}\right)^2} = \frac{2\sqrt{330}}{11}.$$

f) Điểm $A'(a ; b ; c)$ đối xứng với A $(2 ; 3 ; 1)$ qua d_2 khi và chỉ khi H là trung điểm của AA', tức là

$$\frac{a+2}{2} = \frac{8}{11} \;;\quad \frac{b+3}{2} = \frac{1}{11} \;;\quad \frac{c+1}{2} = \frac{21}{11},$$

do đó

$$a = -\frac{6}{11},\ b = -\frac{31}{11}, c = \frac{31}{11}.$$

Vậy $$A' = \left(-\frac{6}{11}; -\frac{31}{11}; \frac{31}{11}\right).$$

4. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0 ; 1 ; 6)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 2 ; 3)$, đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1 ; -2 ; 3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(1 ; 1 ; -1)$. Ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$ và $\overrightarrow{MM'}(1 ; -3 ; -3)$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m và n sao cho

$$m\vec{u} + n\vec{u'} = \overrightarrow{MM'},$$

tức là : $\begin{cases} m + n = 1 \\ 2m + n = -3 \\ 3m - n = -3. \end{cases}$

Từ hai phương trình đầu của hệ trên suy ra $m = -4$, $n = 5$ nhưng các giá trị này không thoả mãn phương trình thứ ba.

Vậy hệ phương trình trên vô nghiệm, suy ra hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng đó thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|} = 0.$$

Suy ra hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

b) Giả sử PQ là đường vuông góc chung của d và d' với $P \in d, Q \in d'$. Khi đó ta có $P = (t; 1 + 2t; 6 + 3t), Q = (1 + t'; -2 + t'; 3 - t')$, do đó $\overrightarrow{PQ} = (1 + t' - t; -3 + t' - 2t; -3 - t' - 3t)$.

Vectơ $\overrightarrow{PQ}$ vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ nên :

$$\begin{cases} (1 + t' - t) + 2(-3 + t' - 2t) + 3(-3 - t' - 3t) = 0 \\ (1 + t' - t) + (-3 + t' - 2t) - (-3 - t' - 3t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -14t = 14 \\ 3t' = -1. \end{cases}$$

Vậy $t = -1$ và $t' = -\dfrac{1}{3}$.

Vậy $P = (-1 ; -1 ; 3)$, $\overrightarrow{PQ} = \left(\dfrac{5}{3} ; -\dfrac{4}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

Khoảng cách giữa d và d' là :

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

c) Đường vuông góc chung là đường thẳng PQ tức là đường thẳng đi qua P và có vectơ chỉ phương là $3\overrightarrow{PQ} = (5\,;-4\,;1)$ nên có phương trình :

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{1}.$$

d) Giả sử đường thẳng Δ song song với Oz cắt d và d' lần lượt tại A và B. Khi đó ta có

$$A = (t;1+2t;6+3t), B = (1+t';-2+t';3-t')$$

và $\overrightarrow{AB} = (1+t'-t;-3+t'-2t;-3-t'-3t)$.

Vì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{k} = (0\,;0\,;1)$ nên $1+t'-t = -3+t'-2t = 0$, nên $t = -4$ và $t' = -5$.

Vậy $A = (-4\,;-7\,;-6)$ và $\overrightarrow{AB} = (0\,;0\,;14)$.

Vậy phương trình của Δ là :

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6 + t. \end{cases}$$

5. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(7\,;2\,;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3\,;2\,;-2)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1\,;-2\,;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(2\,;-3\,;4)$.

Ta có hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ không cùng phương, nhưng vectơ $\overrightarrow{M'M} = (6\,;4\,;-4)$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$.

Điều đó chứng tỏ rằng hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm M'.

Mặt phẳng (P) chứa d và d' phải có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b;c)$ vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ nên :

$$\begin{cases} 3a+2b-2c=0 \\ 2a-3b+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b-2c=0 \\ 8a+b=0. \end{cases}$$

Ta lấy $b = -16$ thì $a = 2$ và $c = -13$, vậy

$$\vec{n} = (2;-16;-13).$$

Ngoài ra mặt phẳng (P) đi qua M' $(1 ; -2 ; 5)$ nên nó có phương trình :

$$2(x-1)-16(y+2)-13(z-5)=0 \text{ hay } 2x-16y-13z+31=0.$$

b) Mặt phẳng (P) cắt các trục toạ độ tại các điểm

$$A\left(-\frac{31}{2} ; 0 ; 0\right), B\left(0 ; \frac{31}{16} ; 0\right), C\left(0 ; 0 ; \frac{31}{13}\right).$$

Tứ diện tạo thành bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng toạ độ là $OABC$ nên có thể tích V là :

$$V=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}.\frac{31}{2}.\frac{31}{16}.\frac{31}{13}=\frac{29791}{2496}.$$

c) Mặt cầu ngoại tiếp tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz=0.$$

Toạ độ của A thoả mãn phương trình đó nên :

$$\left(-\frac{31}{2}\right)^2+2a\times\left(-\frac{31}{2}\right)=0 \text{ hay } 2a=\frac{31}{2}.$$

Tương tự ta có $2b=-\frac{31}{16}$ và $2c=-\frac{31}{13}$.

Vậy mặt cầu có phương trình :

$$x^2+y^2+z^2+\frac{31}{2}x-\frac{31}{16}y-\frac{31}{13}z=0.$$

6. a) Phương trình đường thẳng d có thể viết dưới dạng tham số (bằng cách cho $x=t$):

$$\begin{cases} x=t \\ y=3 \\ z=6+t \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $M(0 ; 3 ; 6)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2 ; 1 ; 2)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(1 ; -1 ; -1)$.

Ba vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ và $\overrightarrow{MM'}=(2 ; -2 ; -4)$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m và n sao cho

$$m\vec{u}+n\vec{u'}=\overrightarrow{MM'}$$

hay là : $\begin{cases} m + n = 2 \\ -n = -2 \\ m - n = -4. \end{cases}$

Dễ thấy rằng hệ phương trình trên vô nghiệm, do đó d và d' chéo nhau. Ngoài ra vì $\vec{u}.\vec{u'} = 0$ nên hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

b) Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với d' và đi qua điểm $M(0 ; 3 ; 6)$ nằm trên d thì (P) cũng đi qua d (vì $\mathrm{d} \perp d'$). Vậy phương trình của (P) là :

$$x - (y - 3) - (z - 6) = 0 \text{ hay } x - y - z + 9 = 0$$

Tương tự, mặt phẳng (Q) vuông góc với d và đi qua $M'(2 ; 1 ; 2)$ nên có phương trình :

$$(x - 2) + 0.(y - 1) + (z - 2) = 0 \text{ hay } x + z - 4 = 0.$$

c) Nếu Δ là đường vuông góc chung của d và d' là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), nên Δ gồm những điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y - z + 9 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Đặt $x = t$ ta được phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

7. a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}(2;-1;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}(1;1;2)$. Vì

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q} = 2 - 1 + 2 = 3 \neq 0$$

nên hai mặt phẳng đó cắt nhau.

Nếu φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right| \ .\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{3}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\varphi = 60^{\circ}$.

b) Vì d song song với cả (P) và (Q) nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b;c)$ vuông góc với cả $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ tức là :

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 3c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = (1 ; 1 ; -1).$$

Vậy đường thẳng d có phương trình :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

c) Mặt phẳng (R) đi qua $B(-1 ; 3 ; 4)$, vuông góc với (P) và (Q) nên vuông góc với d. Vậy (R) có phương trình :

$$(x+1) + (y-3) - (z-4) = 0 \text{ hay } x + y - z + 2 = 0.$$

8. a) Mặt cầu (S) có tâm $I = (1 ; 2 ; 3)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

b) Gọi d là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới mặt phẳng (P) thì :

$$d = \frac{|1+2-3+k|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|k|}{\sqrt{3}},$$

Bởi vậy :

+) Nếu $d > R$ tức $|k| > \sqrt{42}$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu.

+) Nếu $d = R$, tức $k = \pm\sqrt{42}$ thì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu.

+) Nếu $d < R$ tức $|k| < \sqrt{42}$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn.

c) Thay $y = 0$, $z = 0$ vào phương trình mặt cầu ta được :

$x^2 - 2x = 0$, hay x = 0 hoặc x = 2.

Vậy mặt cầu cắt trục Ox tại $O(0 ; 0 ; 0)$ và $A(2 ; 0 ; 0)$. Tương tự ta có

$$B = (0 ; 4 ; 0) \text{ và } C=(0 ; 0 ; 6).$$

Phương trình mặt phẳng (ABC) là :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1.$$

d) Ta có $\overrightarrow{IB} = (-1 ; 2 ; -3)$ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại B là mặt phẳng đi qua B có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IB}$ nên có phương trình :

$$-x + 2(y - 4) - 3z = 0 \text{ hay } -x + 2y - 3z - 8 = 0.$$

e) Phương trình của mặt phẳng (Q') song song với mặt phẳng (Q) :

$$4x + 3y - 12z + d = 0, \text{ với } d \neq -1.$$

Vì (Q') tiếp xúc với mặt cầu nên khoảng cách từ tâm I tới (Q') phải bằng bán kính R nên

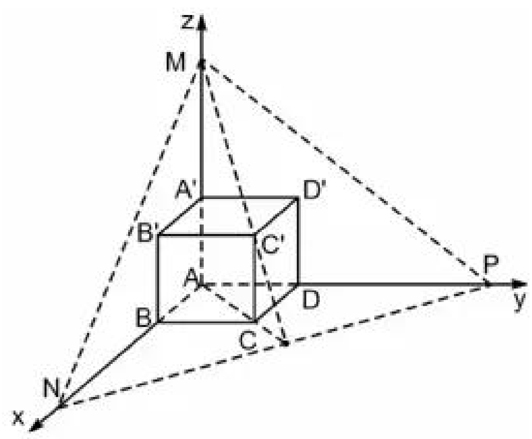
$$\frac{|4 + 6 - 36 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \sqrt{14} \Leftrightarrow \frac{|d - 26|}{13} = \sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow \quad d = 26 \pm 13\sqrt{14}.$$

9. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng với điểm A với các vectơ $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AA'}$.

Khi đó :

$B = (1 ; 0 ; 0)$, $D = (0 ; 1 ; 0)$,
$A' = (0 ; 0 ; 1)$, $C' = (1 ; 1 ; 1)$
$M = (0 ; 0 ; 3)$, $N = (n ; 0 ; 0)$
và $P = (0 ; p ; 0)$.



Hình 69

a) Mặt phẳng (MNP) có phương trình :

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{p} + \frac{z}{3} = 1.$$

Mặt phẳng đó đi qua $C'(1 ; 1 ; 1)$ khi và chỉ khi :

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{3}=1.$$

hay $\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{2}{3} \qquad (*)$

b) Thể tích của hình chóp $AMNP$ là :

$$V=\frac{1}{6}AM.AN.AP=3mp=\frac{1}{2}.np.$$

Với điều kiện (*) ta có :

$$\sqrt{\frac{1}{n}.\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{np}\leq\frac{1}{9}\;\Leftrightarrow\; np\geq 9.$$

Dấu = xảy ra khi $n=p=3$.

Suy ra

$$V=\frac{1}{2}np\geq\frac{9}{2}.$$

Vậy thể tích tứ diện $AMNP$ bé nhất là $\frac{9}{2}$ khi $AMNP$ là hình chóp đều đỉnh A.