# §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

## A. MỤC ĐÍCH

**1.** Nắm được các khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian thông qua hình ảnh của chúng trong thực tế và trong đời sống, qua đó rèn luyện được trí tưởng tượng không gian cho học sinh.

**2.** Nắm được các tính chất thừa nhận để vận dụng khi làm các bài toán hình học không gian đơn giản.

**3.** Biết các cách xác định mặt phẳng, biết cách tìm giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng, tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và kí hiệu mặt phẳng.

**4.** Nắm được phương pháp giải các loại toán đơn giản về hình chóp, hình hộp :

– Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ;

– Tìm giao điểm của một đường thẳng với một mặt phẳng ;

– Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

## B. NỘI DUNG

**1.** Hình học không gian là một môn học mới đối với học sinh lớp 11 vì nó có nội dung mới và phong phú hơn so với hình học phẳng. Do đó trong giờ học đầu tiên cần giới thiệu cho học sinh biết sơ bộ về các đối tượng cơ bản của hình học không gian gồm điểm, đường thẳng và mặt phẳng. Cần xuất phát từ hình ảnh cụ thể của các khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng có trong thực tế để mô tả các khái niệm này trong không gian. Khái niệm mặt phẳng là một khái niệm mới nên cần được chú ý trình bày kĩ hơn. Trong thực tế hình ảnh của mặt phẳng được đưa ra làm ví dụ đều có giới hạn. Hơn nữa khi biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng một hình bình hành là một hình có giới hạn, nên có thể tạo nên sự hiểu lầm đối với học sinh. Ngoài các đối tượng cơ bản chúng ta cần giới thiệu sơ bộ về các mối quan hệ giữa các đối tượng cơ bản như điểm thuộc hay nằm trên mặt phẳng và cũng có thể nói mặt phẳng đi qua điểm đó hoặc đường thẳng cắt mặt phẳng hay nằm trên mặt phẳng v.v...

**2.** Khi dạy về hình học không gian giáo viên nên kết hợp việc dùng các mô hình đơn giản như hình lập phương, hình tứ diện với việc vẽ hình biểu diễn các hình đó để minh hoạ cho mối quan hệ các đối tượng của hình học không gian, đồng thời cũng tập cho học sinh cách vẽ và đọc các loại hình biểu diễn đơn giản ngay từ những tiết học đầu tiên.

– *Hoạt động 1* nhằm cho học sinh biết vẽ hình biểu diễn của tứ diện cùng các dạng đặc biệt của nó. Phần hình biểu diễn trình bày sau đó với nội dung rất sơ lược nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho việc minh hoạ nội dung của các bài giảng. Chú ý rằng khi ta nói hình biểu diễn của một đường thẳng là một đường thẳng là có tính chất lí thuyết, còn trong thực tế bao giờ cũng vẽ một đoạn thẳng để biểu diễn cho một đường thẳng. Đây là những vấn đề tế nhị *buộc chúng ta phải "lờ" đi* và nếu có học sinh thắc mắc thì ta nói rằng ta vẽ hình biểu diễn của một phần đường thẳng đó.

**3.** Cần phân biệt để học sinh hiểu rõ tính chất thừa nhận khác với định lí. Người ta thường gọi một khẳng định đã được chứng minh là một định lí. Muốn chứng minh một định lí nào đó ta phải dựa vào các định lí đã có trước đó. Quá trình này không thể tiếp tục như thế mãi được, cho nên chúng ta phải bắt đầu bằng một số khẳng định rất cơ bản mà tính chất đúng đắn của các mệnh đề đó phải được thừa nhận không chứng minh.

Người ta còn gọi các tính chất thừa nhận đó là các *tiên đề*. Nếu thay đổi các tính chất thừa nhận này thì có thể ta sẽ tạo nên một lí thuyết hình học khác với hình học Ơ-clít. Trong cuộc sống đời thường ở Việt Nam ta phải tuân theo quy tắc giao thông "luôn luôn đi về bên phải của đường". Có lẽ chưa có ai định chứng minh sự đúng đắn của quy tắc đó. Bởi vậy chúng ta buộc phải thừa nhận nó như một "tiên đề". Từ tính chất thừa nhận trên ta suy ra định lí "Tay lái ô tô chạy ở những nước có luật *đi về bên phải của đường* phải nằm về bên trái". Tất nhiên ở một số nước khác như Thái Lan, Ma-lai-xi-a, Xin-ga-po luật đi đường là "đi về bên trái" khi đó "định lí" suy ra từ "tiên đề" này là "Tay lái ô tô phải nằm về bên phải".

Như vậy do quan sát thực tiễn và kinh nghiệm trong cuộc sống người ta đã đưa ra các tính chất thừa nhận, không chứng minh, làm cơ sở cho các suy luận và chứng minh các định lí, đồng thời các tính chất thừa nhận này cũng thường được áp dụng trong việc giải các bài tập hình học không gian.

Tính chất thừa nhận 1 đã có trong phần hình học phẳng và được nói tới trong tính chất thừa nhận 6 nhưng ở đây cần được nhấn mạnh đối với việc xác định một đường thẳng trong không gian.

– Tính chất thừa nhận 2 nhằm giới thiệu một đối tượng mới của hình học không gian là mặt phẳng. Sau đó thông qua tính chất này ta giới thiệu về sự xác định của một mặt phẳng khi biết ba điểm không thẳng hàng của mặt phẳng đó đồng thời giới thiệu luôn kí hiệu của mặt phẳng.

– Tính chất thừa nhận 3 nêu lên mối quan hệ đặc biệt của một đường thẳng với một mặt phẳng là đường thẳng thuộc mặt phẳng. Khi cần chứng minh một đường thẳng $d$ nào đó nằm trong mặt phẳng $(\alpha)$ ta chỉ cần chứng minh $d$ có hai điểm $A$, $B$ phân biệt thuộc mặt phẳng $(\alpha)$.

*Hoạt động 2* nhằm giới thiệu một ứng dụng thực tế của tính chất thừa nhận 3.

*Hoạt động 3* nhằm tập cho học sinh chứng minh rằng muốn chứng minh một điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(ABC)$ ta chỉ cần chứng minh $M$ thuộc một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc mặt phẳng đó và muốn chứng minh đường thẳng $AM$ có nằm trong mặt phẳng $(ABC)$ nói trên ta chỉ cần dựa vào tính chất thừa nhận 3.

Tính chất thừa nhận 4 khẳng định rằng số chiều của không gian ta đang xét phải lớn hơn 2 và tính chất thừa nhận 5 khẳng định rằng số chiều của không gian không vượt quá 3.

Tính chất thừa nhận 4 nhằm giải đáp câu hỏi khi ta gặp bài toán cần phải lấy một điểm $M$ nằm ngoài mặt phẳng $(\alpha)$ cho trước thì liệu có tồn tại một điểm $M$ thoả mãn điều kiện đó không. Riêng tính chất thừa nhận 5 hơi khó giải thích đối với học sinh, nhưng ở đây giáo viên có thể dùng mô hình thực tế để minh hoạ. Với không gian afin $n$ chiều ($n > 3$) có thể có hai mặt phẳng chỉ có một điểm chung duy nhất mà không có đường thẳng chứa các điểm chung của chúng (có thể dùng công cụ đại số tuyến tính để xét vấn đề này).

*Hoạt động 4* nhằm đưa ra một ví dụ cụ thể cho tính chất thừa nhận 5.

Tính chất thừa nhận 6 đưa vào nhằm để sử dụng những kiến thức đã biết về hình học phẳng. Học sinh có thể gặp những bài toán không gian được quy về giải quyết trong từng bộ phận phẳng của nó, do đó các kiến thức về hình học phẳng vẫn được sử dụng để chứng minh hoặc lí giải một số vấn đề cụ thể của hình học không gian. Ngoài ra giữa hình học phẳng và hình học không gian cũng có những tính chất tương tự cần khai thác trong các phần sau. Thí dụ trong mặt phẳng ta có mệnh đề : "Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau". Trong không gian ta cũng có một mệnh đề tương tự : "Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau."

*Hoạt động 5* nhằm khẳng định giao tuyến của hai mặt phẳng phải là một đường thẳng.

*Hoạt động 6* tập cho học sinh làm quen với các khái niệm trong hình chóp.

**4.** Về ba cách xác định mặt phẳng đều có thể quy về một nội dung cần nhớ là "Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng của mặt phẳng đó".

Các ví dụ 1, 2, 3, nhằm củng cố các tính chất thừa nhận và vận dụng chúng trong các bài toán cụ thể. Các ví dụ này nhằm giúp cho học sinh làm quen với các bài tập về hình học không gian như :

– Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ;

– Chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc chứng minh một đường thẳng luôn luôn đi qua một điểm cố định.

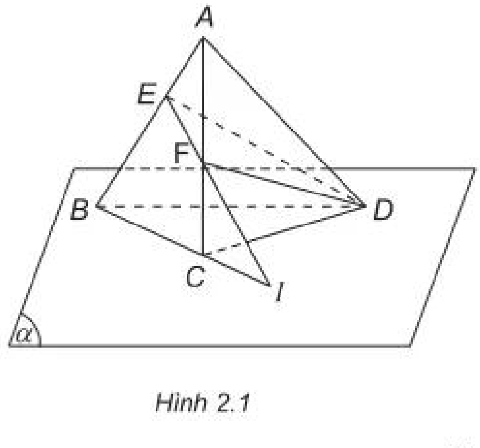
**5.** Hình chóp và tứ diện được đưa vào nhằm tạo tình huống cụ thể để vận dụng các lí thuyết đã học và là cơ hội để gắn toán học với thực tế. Cần cho học sinh nắm được định nghĩa hình chóp và một số tính chất của hình chóp để làm bài tập. Hình tứ diện là một loại hình chóp đặc biệt. Cần cho học sinh làm quen với bài toán tìm thiết diện của hình chóp với một mặt phẳng.

## C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

**1.** a) $E, F \in (ABC) \Rightarrow EF \subset (ABC)$.

b) $I \in BC \Rightarrow I \in (BCD)$.

$I \in EF \Rightarrow I \in (DEF)$ (h.2.1).

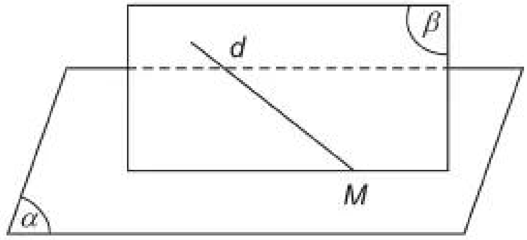



*Hình 2.1*

2. Hiển nhiên $M \in (\alpha)$. Gọi $(\beta)$ là mặt phẳng bất kì chứa $d$, ta có

$$\begin{cases} M \in d \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow M \in (\beta).$$

Vậy $M$ là điểm chung của $(\alpha)$ và mọi mặt phẳng $(\beta)$ chứa $d$ (h.2.2).



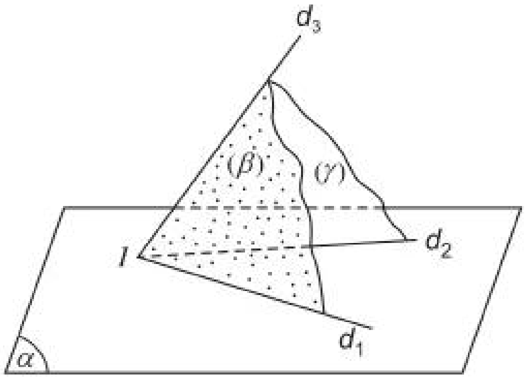

*Hình 2.2*

3. Gọi $d_1$, $d_2$ và $d_3$ là ba đường thẳng đã cho. Gọi $I = d_1 \cap d_2$. Ta chứng minh $I \in d_3$.

$I \in d_1 \Rightarrow I \in (\beta) = (d_1, d_3)$.

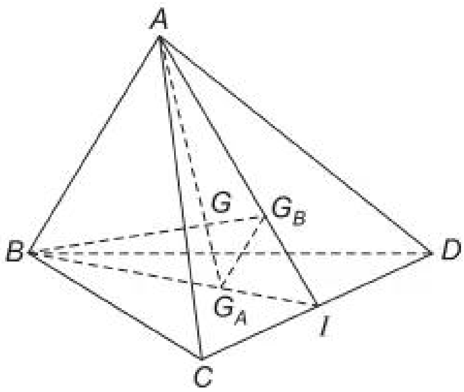
$I \in d_2 \Rightarrow I \in (\gamma) = (d_2, d_3)$.

Từ đó suy ra $I \in d_3$ (h.2.3).




*Hình 2.3*

4. Gọi $I$ là trung điểm của $CD$. Ta có $G_A \in BI$, $G_B \in AI$. Gọi $G = AG_A \cap BG_B$. Dễ thấy $\frac{IG_A}{IB} = \frac{IG_B}{IA} = \frac{1}{3}$ nên $G_AG_B \,//\, AB$ và $\frac{GA}{GG_A} = \frac{AB}{G_AG_B} = 3$. Lí luận tương tự, ta có $CG_C$, $DG_D$ cũng cắt $AG_A$ tại $G'$, $G''$ và $\frac{G'A}{G'G_A} = 3$, $\frac{G''A}{G''G_A} = 3$. Như vậy $G \equiv G' \equiv G''$ (h.2.4).




*Hình 2.4*

***Ghi chú.*** Ta gọi $AG_A$, $BG_B$, $CG_C$ và $DG_D$ là các đường trọng tuyến và $G$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

5. Để tìm giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$, giáo viên nên chỉ rõ phương pháp như sau :

Tìm đường thẳng $d'$ nằm trong $(\alpha)$ mà cắt $d$ tại $I$.

Ta có ngay $I$ là giao điểm của $d$ và $(\alpha)$.

a) Gọi $E = AB \cap CD$.

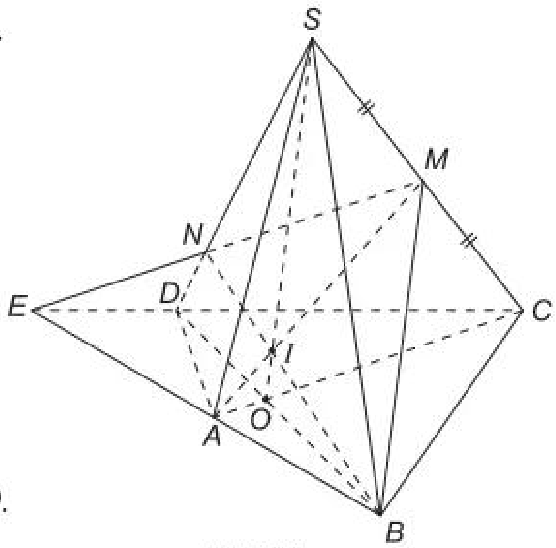
Ta có : $(MAB) \cap (SCD) = ME$.

Gọi $N = ME \cap SD$.

Ta có $N = SD \cap (MAB)$.

b) Gọi $I = AM \cap BN$.

Ta có $\begin{cases} I = AM \cap BN \\ AM \subset (SAC) \\ BN \subset (SBD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow I \in SO.$



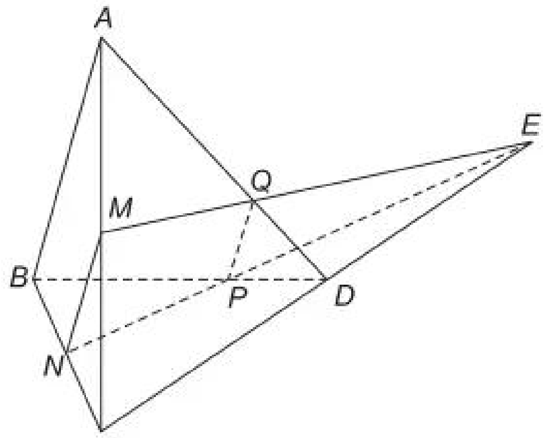
Hình 2.5

Ở đây giáo viên nên nhấn mạnh phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng trong không gian đó là : Chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

**6.** a) Gọi $E = CD \cap NP$.

Ta có $E$ là điểm chung cần tìm.

b) $(ACD) \cap (MNP) = ME$ (h.2.6).



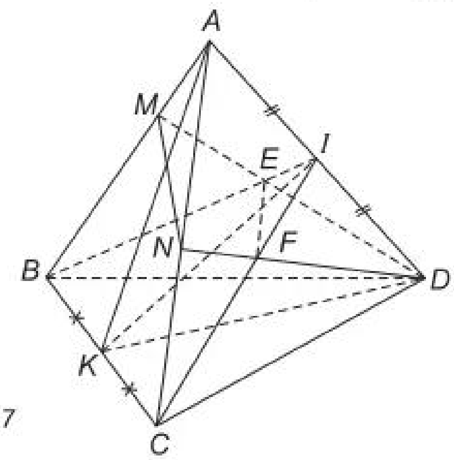
Hình 2.6

**7.** a) $(IBC) \cap (KAD) = KI$.

b) Gọi $E = MD \cap BI$,

$F = ND \cap CI$.

Ta có $EF = (IBC) \cap (DMN)$ (h.2.7).

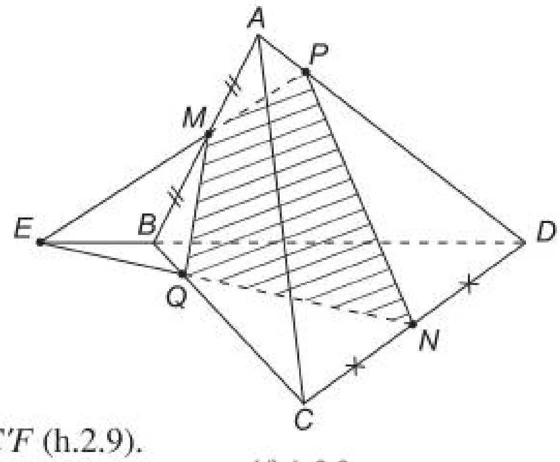


Hình 2.7

**8.** a) $(MNP) \cap (BCD) = EN$.

b) Gọi $Q = BC \cap EN$.

Ta có : $BC \cap (PMN) = Q$ (h.2.8).



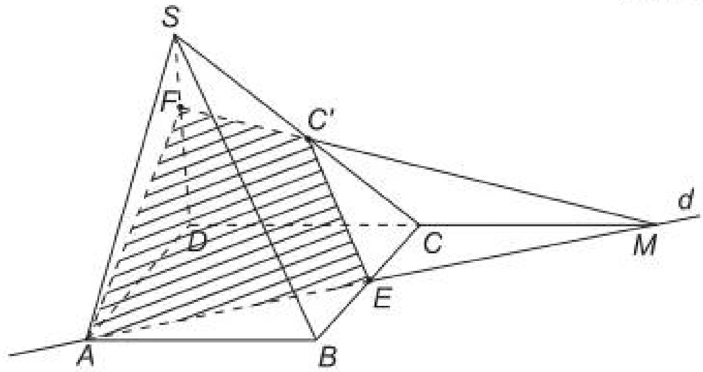

*Hình 2.8*

**9.** a) Gọi $M = AE \cap DC$.

Ta có $M = DC \cap (C'AE)$.

b) Gọi $F = MC' \cap SD$.

Ta có thiết diện cần tìm là tứ giác $AEC'F$ (h.2.9).




*Hình 2.9*

**10.** a) Gọi $N = SM \cap CD$ (h.2.10).

Ta có $N = CD \cap (SBM)$.

b) Gọi $O = AC \cap BN$.

Ta có $(SBM) \cap (SAC) = SO$.

c) Gọi $I = SO \cap BM$.

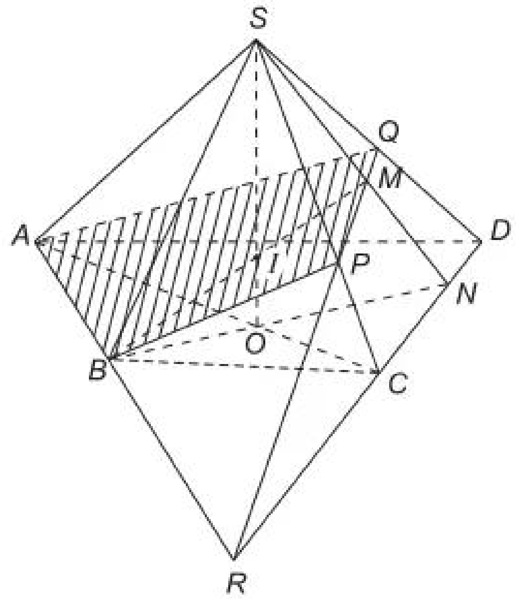
Ta có $I = BM \cap (SAC)$

d) Gọi $R = AB \cap CD$,

$P = MR \cap SC$.

Ta có $P = SC \cap (ABM)$

$\Rightarrow PM = (SCD) \cap (AMB)$.




*Hình 2.10*