§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. MỤC ĐÍCH

1. Nắm được các định nghĩa : vectơ trong không gian, hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, độ dài của một vectơ, hai vectơ bằng nhau và vectơ - không.

2. Biết thực hiện phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian và phép nhân vectơ với một số.

3. Nắm được định nghĩa về sự đồng phẳng của ba vectơ và điều kiện để ba vectơ đồng phẳng.

Lưu ý. Những điều đã biết về vectơ trong mặt phẳng cũng đúng trong không gian nên không cần chứng minh lại. Việc nhắc lại các nội dung cần thiết liên quan đến vectơ và các phép toán vectơ là điều cần thiết và cần lưu ý thêm những chỗ khác biệt ví dụ như tính chất phân phối của phép cộng vectơ vẫn đúng trong trường hợp các vectơ không đồng phẳng.

Riêng phép toán tích vô hướng của hai vectơ trong không gian được trình bày trong §2 nhằm phục vụ trực tiếp cho việc xét quan hệ vuông góc của hai đường thẳng và các quan hệ vuông góc của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

B. NỘI DUNG

1. Về định nghĩa và các phép toán về vectơ trong không gian có các nội dung sau :

a) Vectơ trong không gian được định nghĩa giống như vectơ trong mặt phẳng. Các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, sự bằng nhau của hai vectơ, vectơ - không được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng. Cần lấy các ví dụ trong không gian để minh hoạ cho các khái niệm này.

– *Hoạt động 1* nhằm củng cố khái niệm định nghĩa vectơ trong không gian và giới thiệu khái niệm không đồng phẳng của ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ trong không gian.

– *Hoạt động 2* nhằm củng cố khái niệm hai vectơ bằng nhau trong không gian thông qua hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'}$.

Có thể cho học sinh tìm thêm các vectơ có điểm đầu và điểm cuối của hình hộp nói trên và bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$ hoặc bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

b) Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng. Cần lấy các ví dụ trong không gian để nhắc lại các phép toán này cùng các tính chất của chúng.

Cần tập cho học sinh nhớ lại quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành trong hình học phẳng và sau đó giới thiệu quy tắc hình hộp trong không gian. Ví dụ với ba điểm A, B, C bất kì trong không gian ta luôn luôn có các hệ thức :

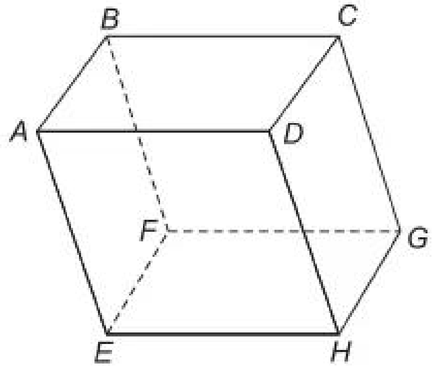
$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} & & \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} & \text{và} & \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} & & \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \end{array}$$

– Đối với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Cần lưu ý rằng ngược lại nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng thì $ABCD$ mới là hình bình hành.

– Nếu hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có ba cạnh xuất phát từ đỉnh A là AB, AD, AA' và có đường chéo là AC' thì khi đó theo quy tắc hình hộp ta có :

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$$

– *Hoạt động 3* nhằm ôn lại các tính chất quan trọng của phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian (h.3.1)



Hình 3.1

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \left(\underbrace{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}}_{\vec{0}}\right) + \left(\underbrace{\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{HG}}_{\vec{0}}\right) = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CH} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}) - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}) = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CG}) = \vec{0}.$

Khi thực hiện các phép toán này, học sinh có thể đưa ra nhiều cách biến đổi khác nhau, giáo viên cần hướng dẫn để học sinh làm đúng các kết quả theo đúng các quy tắc đã được học.

c) Trong không gian tích của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số $k \neq 0$ là vectơ $k\vec{a}$ được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng và có các tính chất giống các tính chất đã được nêu trong mặt phẳng. Phép nhân vectơ với một số có liên quan mật thiết với phép cộng vectơ. Ta có

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$$

$$(-\vec{a}) + (-\vec{a}) = -2\vec{a}$$

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + ... + \vec{a}}_{k \text{ lần}} = k\vec{a}.$$

Cần cho học sinh nhắc lại định nghĩa phép nhân vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số $k \neq 0$ đã được trình bày trong mặt phẳng.

Thông qua ví dụ 2 về phép nhân vectơ với một số ta có kết quả :

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ với $k = \frac{1}{2}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$ với $k = 3$.

Hoạt động 4 cung cấp các hình ảnh trực quan về việc nhân vectơ với một số k (dương và âm) rồi sau đó xác định vectơ tổng $\vec{m}+\vec{n}$.

- Cho vectơ $\vec{a}$, ta hãy xác định vectơ $\vec{m}=2\vec{a}$. Vectơ $\vec{m}$ này cùng hướng với $\vec{a}$ và có độ dài gấp hai lần độ dài của vectơ $\vec{a}$.
- Cho vectơ $\vec{b}$, ta hãy xác định vectơ $\vec{n}=-3\vec{b}$. Vectơ $\vec{n}$ này ngược hướng với vectơ $\vec{b}$ và có độ dài gấp ba lần độ dài của vectơ $\vec{b}$.
- Lấy một điểm O bất kì trong không gian, vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{m}$ rồi vẽ tiếp $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$. Ta có $\overrightarrow{OB}=\vec{m}+\vec{n}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

2. Về điều kiện đồng phẳng của ba vectơ có các nội dung sau :

a) Khái niệm đồng phẳng của ba vectơ trong không gian là một khái niệm mới và khó đối với học sinh.

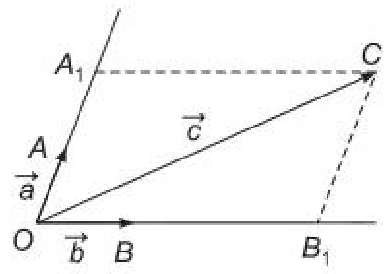
Trước khi trình bày định nghĩa về sự đồng phẳng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong không gian, SGK đã đưa ra hình ảnh giá của ba vectơ đó khi chúng cùng đi qua một điểm O trong không gian và từ đó xây dựng khái niệm không đồng phẳng và đồng phẳng của ba vectơ đã cho. Sau đó cho học sinh rút ra nhận xét là giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ luôn luôn song song với một mặt phẳng (α) nào đó hoặc thuộc mặt phẳng (α) đó trong trường hợp ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đã cho đồng phẳng và rút ra định nghĩa về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian. Cần lưu ý để học sinh hiểu rằng nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì không bắt buộc ba vectơ đó có giá cùng thuộc một mặt phẳng.

Ví dụ 3 nhằm củng cố định nghĩa về sự đồng phẳng của ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$. Sau khi trình bày xong lời giải của ví dụ 3, có thể cho học sinh chứng minh thêm ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CD}$ cũng đồng phẳng bằng cách giải tương tự.

Hoạt động 5. Các vectơ $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{ED}$ có giá song song với mặt phẳng (AFC) và riêng vectơ $\overrightarrow{AF}$ có giá thuộc mặt phẳng đó nên ba vectơ này đồng phẳng.

b) Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và từ định lí về sự phân tích (hay biểu thị) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng ta có thể chứng minh định lí 1 như sau :

Từ điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Xét hình bình hành OA_1CB_1 với A_1, B_1 lần lượt thuộc các đường thẳng OA, OB.



Hình 3.2

Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ (h.3.2)

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (theo quy tắc hình bình hành).

Để chứng minh (m, n) duy nhất ta giả sử có cặp số (m', n') khác sao cho $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$.

Khi đó $m\vec{a} + n\vec{b} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$ hay $(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} = \vec{0}$.

Nếu $m \neq m'$ ta suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương là trái với giả thiết.

Vậy $m = m'$. Chứng minh tương tự ta có $n = n'$ nghĩa là cặp số m, n là duy nhất.

Hoạt động 6. Trước hết ta dựng vectơ $2\vec{a}$ và vectơ $-\vec{b}$. Theo quy tắc của phép trừ hai vectơ, ta tìm được vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} + (-\vec{b})$. Vì $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ nên theo định lí 1 ta có ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng (vì có dạng $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ trong đó $m = 2$ và $n = -1$).

Hoạt động 7. Ta có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và giả sử $p \neq 0$.

Khi đó ta có thể viết $p\vec{c} = -m\vec{a} - n\vec{b} \Leftrightarrow \vec{c} = -\dfrac{m}{p}\vec{a} - \dfrac{n}{p}\vec{b}$.

Theo định lí 1 ta có ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Ví dụ 4 nhằm củng cố phương pháp dùng định lí 1 để chứng minh ba vectơ đồng phẳng.

Ta có thể chứng minh định lí 2 về việc biểu thị một vectơ bất kì theo ba vectơ không đồng phẳng trong không gian như sau :

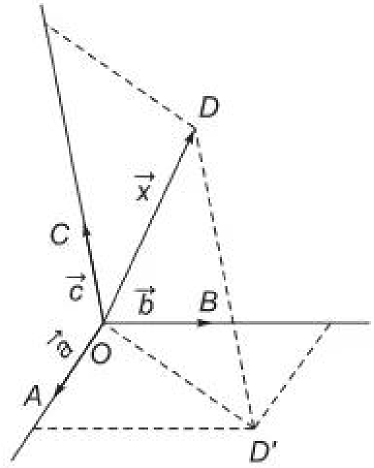
Từ điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{x}$ thì bốn điểm O, A, B, C không cùng thuộc một mặt phẳng vì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Từ điểm D kẻ đường thẳng Δ song song (hoặc trùng) với đường thẳng OC, đường thẳng Δ này cắt mặt phẳng (OAB) tại điểm D' (h.3.3). Khi đó ta có :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$$

Theo định lí 1 ta có cặp số m, n duy nhất sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa do $\overrightarrow{D'D}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng phương nên có một số p để $\overrightarrow{DD'} = p\vec{c}$. Vậy

$$\vec{x} = \overrightarrow{OD} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}.$$



Hình 3.3

Do ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta chứng minh được bộ ba số m, n, p là duy nhất. Thực vậy, nếu có một bộ ba số m', n', p' khác sao cho $\vec{x} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$ thì ta có :

$$(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} + (p - p')\vec{c} = \vec{0}.$$

Nếu $m \neq m'$ thì $\vec{a} = \dfrac{n' - n}{m - m'}\vec{b} + \dfrac{p' - p}{m - m'}\vec{c}$ và như vậy ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là trái với giả thiết. Vậy $m = m'$. Chứng minh tương tự ta có $n = n'$ và $p = p'$ nghĩa là bộ ba số m, n, p là duy nhất.

Định lí 2 này là một định lí quan trọng vì dựa vào định lí này người ta mới xây dựng được khái niệm toạ độ của vectơ và toạ độ của điểm trong không gian, đặt nền móng cho sự hình thành việc nghiên cứu hình học bằng phương pháp toạ độ trong không gian.

Từ nay muốn chứng minh ba vectơ nào đó đồng phẳng ta có thể thực hiện theo hai cách :

– Dựa vào định nghĩa, ta chứng minh rằng ba vectơ đó có giá song song với một mặt phẳng xác định nào đó.

– Chứng minh rằng một vectơ nào đó trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đã cho được biểu thị qua hai vectơ còn lại, ví dụ như $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là hai số cụ thể nào đó.

C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ là : $\overrightarrow{IA'}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KB'}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{LC'}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MD'}$.

b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ là : $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{MD}$.

c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ là : $\overrightarrow{IA'}$, $\overrightarrow{KB'}$, $\overrightarrow{LC'}$, $\overrightarrow{MD'}$.

2. a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}+\overrightarrow{D'B'}+\overrightarrow{B'A}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$

3. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Khi đó :

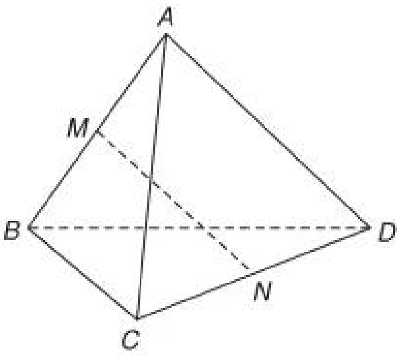
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}.$$

4. a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ (h.3.4)

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$



Hình 3.4

b) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{array}\right\}$$

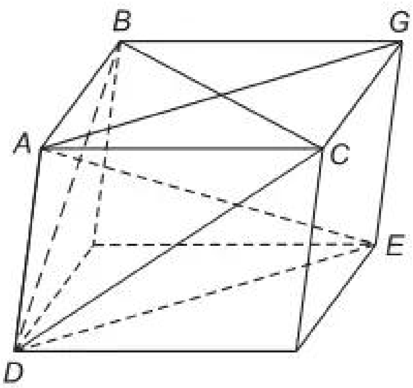
$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\ \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}).$

5. a) Ta có $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$

với G là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABGC$ vì $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$ với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AGED$ (h.3.5).



Hình 3.5

Do đó AE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

b) Ta có $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

mà $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DG}$.

Vậy $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$ nên F là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ADGF$.

6. Ta có

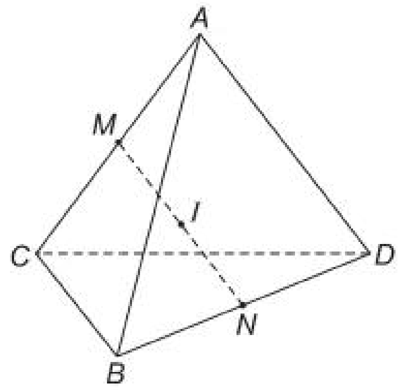
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA}\\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB}\\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG} \text{ vì } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

7. a) Ta có $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

mà $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$ và $2\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$

nên $2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) = \vec{0}$

hay $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ (h.3.6)



Hình 3.6

b) Với điểm P bất kì trong không gian ta có :

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PI}$

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PI}$.

Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} - 4\overrightarrow{PI}$

mà theo câu a), ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ nên suy ra :

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}).$$

8. $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}) = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$.

9. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$ (h.3.7) (1)

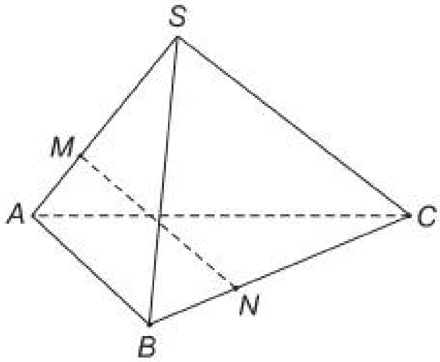
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (2)

Cộng (1) với (2) ta được :

$$3\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN}}_{\vec{0}}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

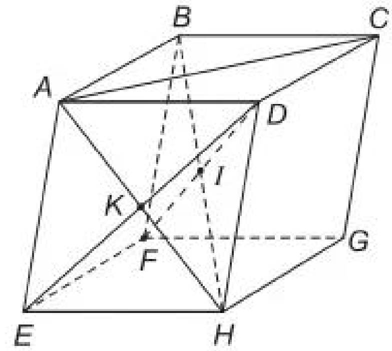
Do đó ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AB}$ đồng phẳng.



Hình 3.7

10. Ta có $KI \parallel EF \parallel AB$ nên $KI \parallel$ mp (ABC), (h.3.8) $FG \parallel BC$ và $AC \subset$ mp (ABC).

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AC}$ có giá cùng song song với một mặt phẳng (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC). Vậy ba vectơ $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.



Hình 3.8