§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. MỤC ĐÍCH

1. Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ trong không gian và định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.

2. Nắm được định nghĩa vectơ chỉ phương của đường thẳng và biết xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

3. Nắm được định nghĩa hai đường thẳng vuông góc với nhau trong không gian.

B. NỘI DUNG

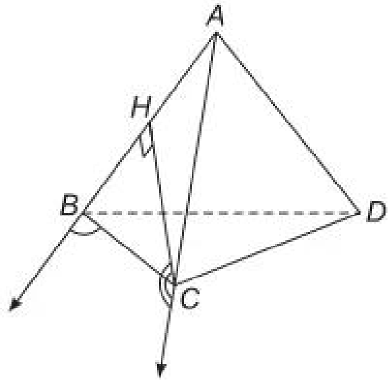
Giáo viên cần lưu ý các vấn đề sau :

1. Cần giúp học sinh biết cách xác định góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cho trước trong không gian. Chú ý rằng $0^o \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^o$.

Hoạt động 1. Với tứ diện đều $ABCD$ và H là trung điểm của cạnh AB. Ta có : (h.3.9)

+ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^{o}$

+ $(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AC}) = 150^{o}$.



Hình 3.9

2. *Về tích vô hướng của hai vectơ trong không gian*

a) Thông qua định nghĩa, cần lưu ý để học sinh nhớ rằng tích vô hướng của hai vectơ là một số nên mới gọi là tích vô hướng. Ta có :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

b) Từ công thức này ta có thể suy ra các ứng dụng của tích vô hướng :

• Tính độ dài : $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2}$

• Tính góc : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$ và từ đó suy ra góc $(\vec{u}, \vec{v})$.

Ta có $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^{o} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Thông qua ví dụ 1, giúp học sinh biết cách tính góc của hai vectơ trong không gian và tính tích vô hướng của hai vectơ với chú ý rằng tích vô hướng của hai vectơ có thể là một số âm.

Hoạt động 2.

+ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

+ Ta có $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC'}|.|\overrightarrow{BD}|}$ trong đó

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \underbrace{(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})}_{0} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \underbrace{(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB})}_{0} + \underbrace{(\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD})}_{0} - \underbrace{(\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB})}_{0}$$

$$= 0 \quad -AB^2 + AB^2 - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad 0$$

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

Do đó $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ vuông góc với nhau.

3. ***Về khái niệm vectơ chỉ phương của đường thẳng***

a) Cần làm cho học sinh nắm được định nghĩa vectơ chỉ phương của đường thẳng để xác định góc giữa hai đường thẳng. Cần chú ý tới ba nhận xét về đặc điểm của vectơ chỉ phương của đường thẳng d sau đây :

– Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d

– Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó. Vấn đề này sẽ được nhắc tới khi cần viết phương trình tham số của đường thẳng ở chương trình Hình học 12.

– Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

4. Có hai cách để tính góc giữa hai đường thẳng a và b :

a) Theo định nghĩa : Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

Chú ý rằng nếu gọi α là góc giữa hai đường thẳng a, b thì ta luôn luôn lấy $0^o \leq \alpha \leq 90^o$.

b) Dựa vào các vectơ chỉ phương : giả sử $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì ta có góc giữa hai đường thẳng a, b bằng α nếu $0^o \leq \alpha \leq 90^o$ và bằng $180^o - \alpha$ nếu $90^o < \alpha \leq 180^o$.

Hoạt động 3.

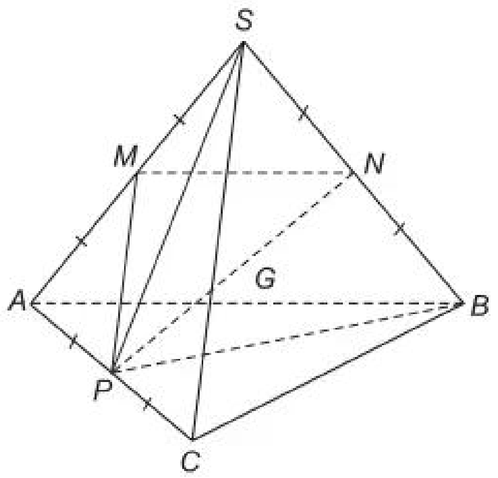
+ Góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$ bằng 90^o

+ Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'C'$ bằng 45^o

+ Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$ bằng 60^o.

Chú ý. Để tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC trong ví dụ 2 ta có thể làm cách khác như sau :

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, AC. Ta nhận thấy góc giữa hai đường thẳng AB và SC chính là góc giữa hai đường thẳng MN và MP. (h.3.10)



Hình 3.10

Ta có $MN = MP = \dfrac{a}{2}$, $SP^2 = \dfrac{3a^2}{4}$

$$BP^2 = AP^2 + AB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Xét tam giác SPB với đường trung tuyến PN ta có $PN^2 = \dfrac{SP^2 + PB^2}{2} - \dfrac{SB^2}{4}$.

Do đó $2PN^2 = SP^2 + PB^2 - \dfrac{SB^2}{2} = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{6a^2}{4}$. Vậy $PN^2 = \dfrac{3a^2}{4}$.

Xét tam giác MNP ta có :

$$\cos\widehat{PMN} = \frac{MN^2 + MP^2 - PN^2}{2MN.MP} = \frac{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}}{2\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $\widehat{PMN} = 120^\circ$.

Suy ra góc của hai đường thẳng MN và MP là 60°.

5. Về hai đường thẳng vuông góc :

a) Làm cho học sinh nắm được định nghĩa hai đường thẳng vuông góc với nhau với chú ý rằng hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

b) Muốn chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau, ta có thể dựa vào các vectơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ của các đường thẳng đó :

$$a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$$

Mặt khác nếu có $a \parallel b$ và đường thẳng d vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì d vuông góc với đường thẳng còn lại.

Hoạt động 4.

+ Các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình lập phương và vuông góc với đường thẳng AB là :

$$BC, AD, B'C', A'D', AA', BB', CC', DD', AD', A'D, BC', B'C.$$

+ Các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình lập phương và vuông góc với đường thẳng AC là :

$$AA', BB', CC', DD', BD, B'D', B'D, BD'.$$

Hoạt động 5. Giáo viên cần hướng dẫn cho học sinh tìm những hình ảnh thực tế minh hoạ sự vuông góc của hai đường thẳng trong không gian (trường hợp cắt nhau và trường hợp chéo nhau).

C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = 45^{\circ}$; b) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = 60^{\circ}$; c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = 90^{\circ}$.

2. a)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})\\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0.$$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0,\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$.

3. a) a và b nói chung không song song

b) a và c nói chung không vuông góc.

4. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$

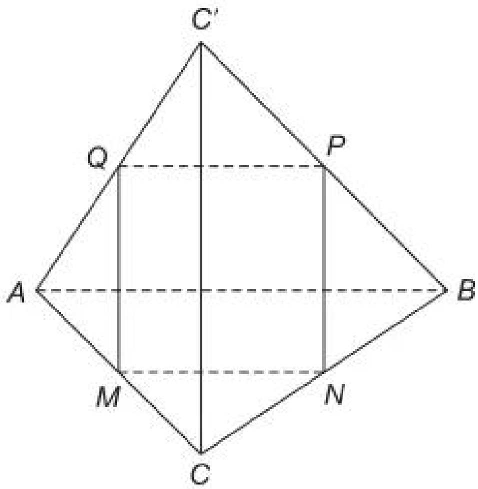
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

Vậy $AB \perp CC'$.

b) $MN = PQ = \dfrac{AB}{2}$

và $MQ = NP = \dfrac{CC'}{2}$.

Vì $AB \perp CC'$ mà $AB \,//\, MN$, $CC' \,//\, MQ$ nên $MN \perp MQ$. Do đó hình bình hành $MNPQ$ là hình chữ nhật (h.3.11).



Hình 3.11

5. $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0.$

Do đó $SA \perp BC$. Tương tự ta chứng minh được $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

6. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = 0 \Rightarrow AB \perp OO'.$

Tứ giác $CDD'C'$ là hình bình hành có $CC' \perp AB$ nên $CC' \perp CD$.

Do đó hình bình hành $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

7. Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC\sin A = \dfrac{1}{2}AB.AC\sqrt{1-\cos^2 A}.$

Vì $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$ nên $\sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{\dfrac{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2}}.$

Do đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$

8. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp CD.$

b) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(AB^2\cos 60^o + AB^2\cos 60^o - AB^2) = 0.$$

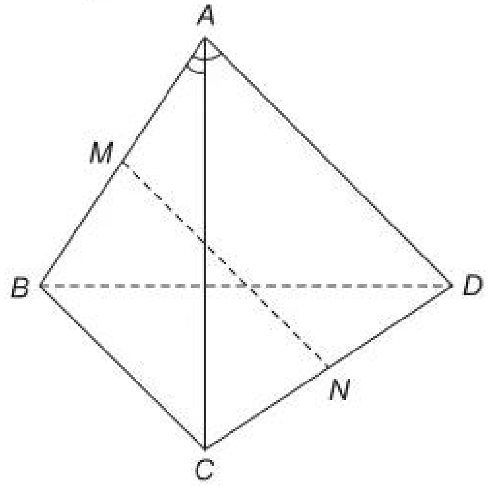
Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = 0$, do đó $MN \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= 0$$

Vậy $MN \perp CD$. (h.3.12)



Hình 3.12