§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. MỤC ĐÍCH

1. Nắm vững định nghĩa hai mặt phẳng song song.

2. Nắm được điều kiện để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau là mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (β).

3. Nắm được tính chất qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho và các hệ quả.

4. Nắm được định lí Ta-lét (chỉ xét định lí Ta-lét thuận).

5. Nắm được định nghĩa hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp cụt và các tính chất của các hình đó.

B. NỘI DUNG

1. Trước hết cho học sinh quan sát trong thực tiễn nêu lên hình ảnh của hai mặt phẳng song song. Trước khi nêu định nghĩa về hai mặt phẳng song song có thể cho học sinh xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt. Có hai trường hợp :

– Hai mặt phẳng có điểm chung. Khi đó hai mặt phẳng có một đường thẳng chung duy nhất gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng ấy.

– Hai mặt phẳng không có điểm chung. Trong trường hợp đó ta nói hai mặt phẳng đó song song với nhau.

Hoạt động 1 nhằm củng cố cho định nghĩa về hai mặt phẳng song song.

2. Để nhận biết dấu hiệu của hai mặt phẳng song song

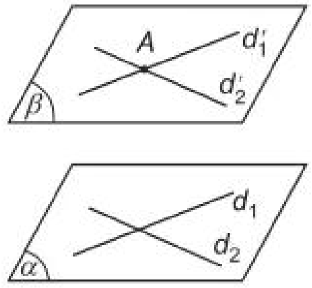
– Về lí thuyết ta dựa vào định nghĩa hai mặt phẳng song song.

– Về thực hành người ta thường dựa vào điều kiện để hai mặt phẳng song song thông qua nội dung của định lí 1. Trong các bài tập, học sinh phải chứng minh một mặt phẳng nào đó song song với một mặt phẳng đã được xác định.

Hoạt động 2 nhằm vận dụng định lí 1 để xác định và chứng minh hai mặt phẳng song song đồng thời cũng nhằm mục đích chuẩn bị cho định lí 2.

3. Định lí 2 nêu lên sự xác định duy nhất của mặt phẳng đi qua một điểm M nằm ngoài một mặt phẳng (α) cho trước và song song với mặt phẳng (α) đó.

Ta có thể chứng minh định lí 2 như sau :



Hình 2.20

Giả sử ta có điểm A nằm ngoài mặt phẳng (α) cho trước. Trong (α) lấy hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau. Qua A, kẻ các đường thẳng d_1' và d_2' lần lượt song song với d_1 và d_2 *(h.2.20)*. Gọi (β) là mặt phẳng xác định bởi d_1' và d_2'. Ta có $A \in (\beta)$ và (β) chứa hai đường thẳng cắt nhau d_1', d_2' và cùng song song với (α) nên $(\beta) \,//\, (\alpha)$. Vậy (β) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Giả sử có mặt phẳng (β') khác (β) cũng đi qua A và song song với (α). Ta có (β') và (β) cùng đi qua A và cùng song song d_1 nên (β) và (β') cắt nhau theo giao tuyến đi qua A và song song với d_1. Đó chính là d_1' nằm trong (β'). Lí luận tương tự ta có d_2' nằm trong (β'). Vậy (β') trùng (β) vì cùng chứa hai đường thẳng d_1' và d_2' cắt nhau.

Từ định lí này ta có các hệ quả sau đây :

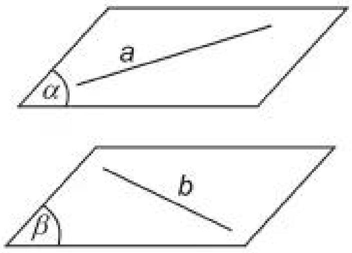
a) Qua đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) có một và chỉ một mặt phẳng (β) song song với (α).

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

c) Mọi đường thẳng d đi qua một điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng (β) đi qua A và song song với (α).

Từ định lí 2 và các hệ quả ta suy ra kết luận sau :

Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có một cặp mặt phẳng $((\alpha), (\beta))$ song song với nhau được xác định duy nhất trong đó (α) chứa đường này và (β) chứa đường kia.



Hình 2.21

4. Khi dạy định lí 3 giáo viên cần nêu rõ hai kết luận :

– (γ) cắt (β).

– Hai giao tuyến song song với nhau.

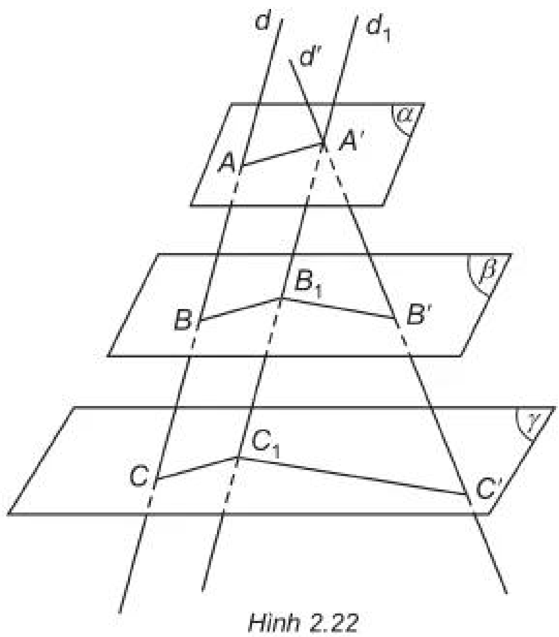
Các kết luận trên đây được chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Đây là một phương pháp chứng minh thường gặp trong môn Hình học không gian, chúng ta nên tập luyện cho học sinh nhằm giúp học sinh tập làm quen với phương pháp chứng minh này.

5. Ở THCS học sinh đã được học về định lí Ta-lét trong mặt phẳng nói về những đường thẳng song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. Định lí Ta-lét trong không gian có nội dung tương tự và nói về ba mặt phẳng song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. *Hoạt động 3* nhằm chuẩn bị cho việc học định lí Ta-lét trong không gian.

Khi phát biểu về nội dung của định lí Ta-lét chúng ta cần giải thích để học sinh hiểu được thế nào là *các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ*. Giả sử ba mặt phẳng song song là (α), (β), (γ) cắt hai đường thẳng d, d' lần lượt tại A, B, C và A', B', C' (h.2.22). Khi đó ta cần phải chứng minh hệ thức nói về các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ sau đây :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ta có thể chứng minh định lí Ta-lét trong không gian như sau :



Hình 2.22

Trường hợp 1 : d và d' đồng phẳng.

Áp dụng định lí Ta-lét trong mặt phẳng (d, d'), với các đường thẳng song song AA', BB', CC' và hai cát tuyến d, d', ta có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Trường hợp 2 : d và d' chéo nhau.

Khi đó A' không nằm trên d. Qua A', vẽ đường thẳng d_1 song song với d cắt (β) và (γ) lần lượt tại B_1 và C_1.

Theo hệ quả của định lí 3, ta có $AB = A'B_1$ và $BC = B_1C_1$.

Mặt khác mặt phẳng (d', d_1) cắt (β) và (γ) theo hai giao tuyến song song lần lượt là B_1B' và C_1C'. Trong tam giác $A'C_1C'$, ta có

$$\frac{A'B_1}{A'B'} = \frac{B_1C_1}{B'C'}, \text{ thay } A'B_1 = AB \text{ và } B_1C_1 = BC,$$

ta được $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Từ đó suy ra $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

6. Sau khi có quan hệ song song ta có thể đưa ra định nghĩa của hình lăng trụ tổng quát. Trong SGK lớp 11 đưa ra hình lăng trụ nhằm thể hiện các quan hệ song song trên một vật thể hình học có hình dạng cụ thể. Chúng ta cần lưu ý rằng hình lăng trụ là hình gồm hai *đa giác đáy* và các mặt bên là các *hình bình hành*. Cần cho học sinh làm quen với các khái niệm *mặt đáy, cạnh đáy, cạnh bên, đỉnh* của hình lăng trụ. Người ta còn dựa vào hình dạng của đáy hình lăng trụ để gọi tên của hình lăng trụ đó. Ví dụ ta có hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, v.v... Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp*.

Trong khi làm các bài toán có liên quan đến hình lăng trụ, cần cho học sinh tập làm quen và nắm vững các tính chất sau đây :

– Các cạnh bên của một hình lăng trụ song song và bằng nhau.

– Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

– Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song với nhau.

– Hình lăng trụ được xác định nếu biết một đáy và một cạnh bên của nó.

– Riêng đối với hình hộp là một hình lăng trụ đặc biệt. Hình hộp có 8 đỉnh và có bốn cặp đỉnh *đối diện*, trong đó *hai đỉnh đối diện* là hai đỉnh không cùng nằm chung trên một mặt nào của hình hộp. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo* của hình hộp. Hình hộp có 4 đường chéo và bốn đường chéo này đồng quy tại *tâm* của hình hộp.

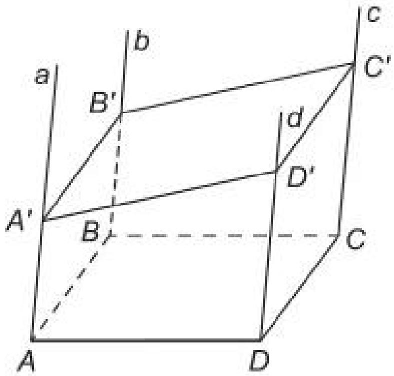
– Hình lăng trụ có đáy và mặt bên là những hình vuông được gọi là *hình lập phương.*

Như vậy hình lập phương là một loại hình hộp đặc biệt.

Trong định nghĩa của hình lăng trụ ta không dùng khái niệm "miền đa giác" và "miền bình hành". Khái niệm "miền" được hiểu là hình gồm có đa giác và các điểm nằm trong đa giác đó. Như vậy có thể nói *miền tam giác*, *miền bình* *hành*. Tuy nhiên, trong thực tế nhiều khi để đơn giản mà không gây ra sự nhầm lẫn, trong SGK không dùng chữ "miền" mà chỉ nói hình tam giác, hình chữ nhật, hình tứ giác, v.v.. Ví dụ ta có thể nói thiết diện là tứ giác $ABCD$ (gắn với một bài toán cụ thể) mà không cần nói là miền tứ giác $ABCD$. Người ta vẫn hiểu thiết diện của một hình lăng trụ cắt bởi một mặt phẳng nào đó là miền đa giác đã được xác định kể cả đa giác đó.

C. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1. a) $\begin{cases} b \,//\, a \\ BC \,//\, AD \end{cases} \Rightarrow (b, BC) \,//\, (a, AD).$



Hình 2.23

Mà $(A'B'C') \cap (b, BC) = B'C'$

$\Rightarrow (A'B'C') \cap (a, AD) = d'$ và giao tuyến d' qua A' song song với $B'C'$. Vì vậy qua A' ta có thể dựng đường thẳng $d' \,//\, B'C'$ cắt d tại điểm D' sao cho $A'D' \,//\, B'C'$. Dễ thấy : $D' = d \cap (A'B'C')$.

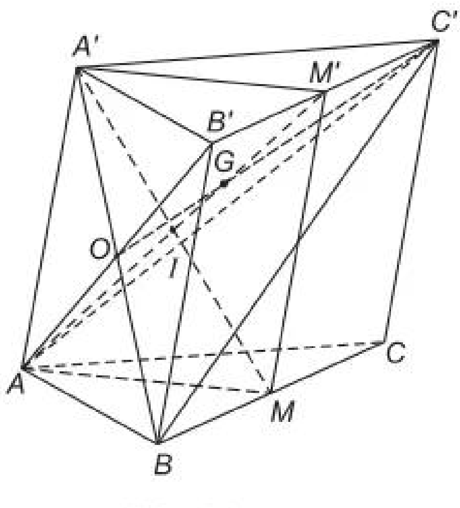
b) Ta có : $A'D' \,//\, B'C'$. (1)

Mặt khác : $(a, b) \,//\, (c, d)$ mà $(A'B'C'D') \cap (a, b) = A'B'$

và $(A'B'C'D') \cap (c, d) = C'D'$ suy ra $A'B' \,//\, C'D'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành (h.2.23).

2. a) $MM' \,//\, BB'$ và $MM' = BB' \Rightarrow MM' \,//\, AA'$ và $MM' = AA'$ (hình lăng trụ) $\Rightarrow$ tứ giác $AA'M'M$ là hình bình hành $\Rightarrow AM \,//\, A'M'$ (h.2.24).



Hình 2.24

b) Gọi $I = A'M \cap AM'$.

Do $M'A \subset (AB'C')$

và $I \in AM'$ nên $I \in (AB'C')$.

Vậy $I = A'M \cap (AB'C')$.

c) $\begin{cases} C' \in (AB'C') \\ C' \in (BA'C') \end{cases} \Rightarrow C' \in (AB'C') \cap (BA'C').$

$$AB' \cap A'B = O \Rightarrow \begin{cases} O \in (AB'C') \\ O \in (BA'C') \end{cases} \Rightarrow O \in (AB'C') \cap (BA'C')$$

$$\Rightarrow (AB'C') \cap (BA'C') = C'O$$

$$\Rightarrow d \equiv C'O.$$

d) $\begin{cases} d \subset (AB'C') \\ AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow d \cap AM' = G \Rightarrow \begin{cases} G \in d \\ G \in AM' \end{cases} \Rightarrow G \in (AM'M).$

Ta có $OC' \cap AM' = G.$

Mà $\begin{cases} OC' \text{ là trung tuyến } \Delta AB'C' \\ AM' \text{ là trung tuyến } \Delta AB'C' \end{cases} \Rightarrow G$ là trọng tâm của $\Delta AB'C'.$

3. a) Ta có $\begin{cases} BD \,//\, B'D' \\ B'D' \subset (B'D'C) \end{cases} \Rightarrow BD \,//\, (B'D'C),$

và $\begin{cases} A'B \,//\, CD' \\ CD' \subset (B'D'C) \end{cases} \Rightarrow A'B \,//\, (B'D'C)$

Vì BD và $A'B$ cùng chứa trong $(A'BD)$ nên $(A'BD) \,//\, (B'D'C).$

b) $\begin{cases} AC' \subset (AA'C'C) \\ AC \cap BD = O \end{cases} \Rightarrow (AA'C'C) \cap (A'BD) = A'O$

$$\Rightarrow AC' \cap A'O = G_1 \Rightarrow \begin{cases} G_1 \in (A'BD) \\ G_1 \in AC' \end{cases}$$

$\Delta G_1AO \backsim \Delta G_1C'A' \Rightarrow \dfrac{G_1O}{G_1A'} = \dfrac{OA}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$

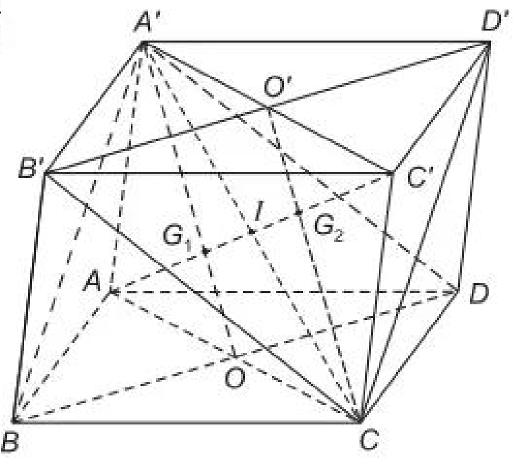
$\Rightarrow G_1$ là trọng tâm $\Delta A'BD.$

Tương tự $G_2 = AC' \cap (B'D'C).$

$\Delta G_2O'C' \backsim \Delta G_2CA$

$\Rightarrow \dfrac{G_2O'}{G_2C} = \dfrac{O'C'}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm $\Delta B'D'C.$



Hình 2.25

c) Ta có $\dfrac{AG_1}{G_1C'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AG_1}{AC'} = \dfrac{1}{3}\cdot$

Tương tự $\dfrac{C'G_2}{G_2A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{C'G_2}{C'A} = \dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{G_1G_2}{AC'} = \dfrac{1}{3}\cdot$

Do đó $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.

d) $(A'IO) \equiv (AA'C'C) \Rightarrow (A'IO)$ cắt hình hộp đã cho theo thiết diện là hình bình hành $AA'C'C$.